

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

А.Н. Барменков, Е.В. Сандракова,
В.Б. Шерстюков, О.В. Шерстюкова

**МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебно-методического пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2010

УДК 517.53(07)
ББК 22.161.5я7
М 54

Методика решения задач повышенной сложности по теории функций комплексного переменного / А.Н. Барменков, Е.В. Сандракова, В.Б. Шерстюков, О.В. Шерстюкова. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 100 с.

Настоящее пособие содержит краткие теоретические сведения и практические рекомендации к решению задач, в основном, повышенной сложности по следующим разделам теории функций комплексного переменного: конформные отображения, вычисление контурных интегралов, вычисление несобственных интегралов.

Предназначено для студентов всех факультетов НИЯУ МИФИ, изучающих теорию функций комплексного переменного.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент д-р физ.-мат. наук И.В. Тихонов

ISBN 978-5-7262-1374-3

© Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ», 2010

Предисловие

Авторы пособия постарались охватить традиционно сложные для понимания разделы теории функций комплексного переменного, чтобы помочь студентам овладеть основными приёмами решения стандартных и трудных задач и успешно сдать зачёт и экзамен.

Методические рекомендации снабжены разбором большого количества задач. Часть из них взята из известного задачника [1]. Для лучшего усвоения материала в пособие помещены также упражнения для самостоятельного решения.

Авторы выражают благодарность студенту 3-го курса мехмата МГУ Д.В.Шерстюкову за техническую помощь.

Все замечания и пожелания, касающиеся содержания данного пособия, просим направлять по адресу: shervb73@gmail.com.

1. Конформные отображения

Приведем вкратце необходимые в дальнейшем определения и факты теории функций комплексного переменного.

Пусть функция f определена в области G комплексной плоскости C и $z_0 \in G$. Говорят, что в точке z_0 существует **коэффициент растяжения**, если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Величина этого предела (разумеется, в случае

его существования) берется за значение коэффициента растяжения в точке z_0 при отображении f . Если f дифференцируема в точке z_0 , то в этой точке коэффициент растяжения существует и равен $|f'(z_0)|$.

Пусть $\Gamma: z = z(t), t \in [\alpha; \beta]$ – непрерывная кривая (называемая в дальнейшем просто кривой) на плоскости, $z_0 = z(t_0) \in \Gamma$. Точка z_0 на Γ называется **гладкой**, если

- 1) существует $\delta > 0: (t_0 - \delta; t_0 + \delta) \subset [\alpha; \beta]$ и отображение $z(t)$ инъективно и взаимно непрерывно на $(t_0 - \delta; t_0 + \delta)$;
- 2) существует $z'(t_0)$ и $z'(t_0) \neq 0$.

В гладкой точке всегда существует касательная к кривой Γ . Далее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция f отображает область G на область G_1 , причем некоторую окрестность точки $z_0 \in G$ на некоторую окрестность точки $w_0 = f(z_0) \in G_1$ она отображает инъективно и непрерывно. Предположим, что $f'(z_0)$ существует и отлична от нуля. Пусть, далее, Γ – любая кривая в G , проходящая через z_0 , и пусть Γ_1 – ее образ при отображении f . Тогда, если z_0 – точка гладкости Γ , то w_0 – точка гладкости Γ_1 , при-

чем аргументы γ и γ_1 касательных векторов к Γ в точке z_0 и к Γ_1 в точке w_0 соответственно связаны равенством $\gamma_1 = \gamma + \arg f'(z_0)$.

Разность $\gamma_1 - \gamma$ называется **углом поворота** касательной к Γ в точке z_0 при отображении f . В условиях теоремы 1 этот угол не зависит от вида кривой Γ и равен $\arg f'(z_0)$. Будем говорить, что в точке z_0 имеет место **консерватизм углов**, если угол поворота любой кривой в точке z_0 (z_0 – ее гладкая точка) не зависит от этой кривой.

Определение 1. Пусть f отображает область $G \subset \mathbb{C}$ на множество $E \subset \mathbb{C}$. Отображение f называется **конформным** в точке $z_0 \in G$, если

- 1) f отображает инъективно и непрерывно некоторую окрестность точки z_0 на некоторую окрестность точки $w_0 = f(z_0)$;
- 2) в точке z_0 существует коэффициент растяжения и имеет место консерватизм углов.

Если f отображает область G на область G_1 инъективно и f конформно в каждой точке $z \in G$, то говорят, что f отображает **конформно** G на G_1 .

Аналитическая и инъективная в области G функция называется **однолистной**. Как известно, однолистная в области G функция отображает конформно область G на ее образ – область G_1 . Отметим важный в теории конформных отображений и часто используемый на практике принцип соответствия границ, который мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть G и G_1 – области в \mathbb{C} с кусочно-гладкими границами Γ и Γ_1 соответственно. Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает G на G_1 . Тогда функция $f(z)$ продолжается по непрерывности на множество $\overline{G} = G \cup \Gamma$, причем продолженная функция отображает инъективно и взаимно непрерывно Γ на Γ_1 .

Обратно, пусть G и G_1 – области в \mathbb{C} с кусочно-гладкими и положительно ориентированными границами Γ и Γ_1 , а $w = f(z)$ аналитична в G и непрерывна вплоть до ее границы Γ . Если $f(z)$ отображает Γ на Γ_1 взаимно однозначно и взаимно непрерывно с сохранением ориентации, то $w = f(z)$ конформно отображает G на G_1 .

Поскольку часто приходится рассматривать функции, определенные в бесконечно удаленной точке или принимающие бесконечные значения в конечной точке, то возникает необходимость определения конформного отображения в этой более общей ситуации.

Определение 2. Отображение $w = f(z)$, определенное в окрестности бесконечно удаленной точки, конформно в точке $z_0 = \infty$,

если отображение $w_1 = \varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ конформно в точке $z_1 = 0$.

Если $f(z_0) = \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, то $w = f(z)$ называется конформным в

точке z_0 , если $w_1 = \varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ конформно в этой точке. На-

конец, если $f(\infty) = \infty$, то говорят, что $w = f(z)$ конформно в точ-

ке $z_0 = \infty$, если отображение $w_1 = \varphi(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ конформно в

точке $z_1 = 0$.

Рассмотрим примеры конформных отображений, осуществляемых некоторыми функциями комплексного переменного.

1.1. Линейная функция $w = az + b$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$.

Легко проверить, что к этой функции применима теорема 1, согласно которой линейная функция осуществляет конформное отображение любой области $G \subset \mathbb{C}$. Кроме того, это отображение конформно и в бесконечно удаленной точке (для доказательства достаточно рассмотреть в соответствии с определением 2 отображение

$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{a}{z} + b} = \frac{z}{a + bz}$ в точке $z = 0$). Отметим, что общая

линейная функция есть суперпозиция трех простейших:

а) $w = z + b$ (сдвиг на вектор b) (рис.1);

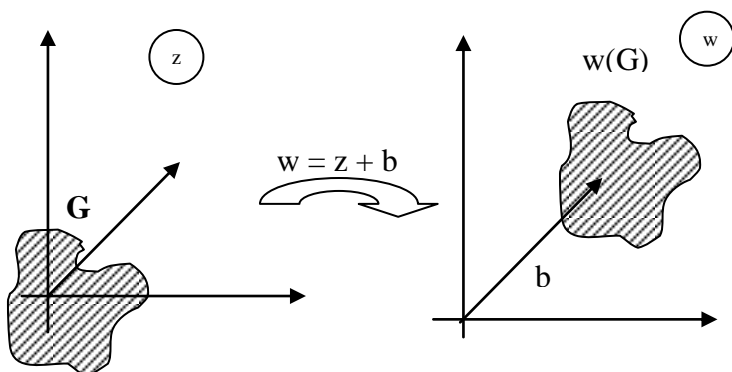


Рис.1

б) $w = kz$, $k > 0$ (гомотетия) (рис.2);

в) $w = e^{i\varphi} z = z(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (поворот на угол φ) (рис.3).

Известно также, что линейная функция преобразует прямую или окружность соответственно в прямую или окружность. Это свойство естественно называть круговым свойством линейной функции, если представлять прямую как окружность бесконечного радиуса.

Очевидно, что линейная функция полностью определяется двумя параметрами, которые однозначно находятся по значениям функ-

ции в двух различных точках или значениям функции и ее производной в одной точке.

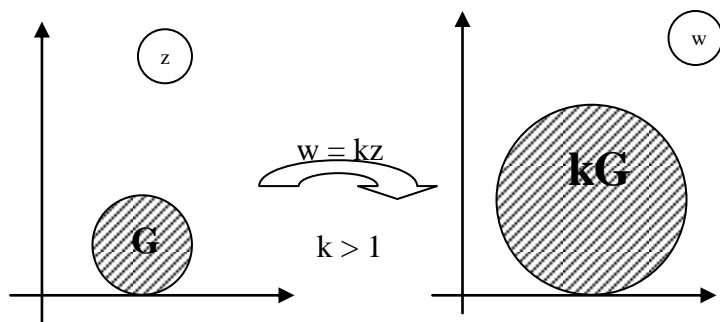


Рис.2

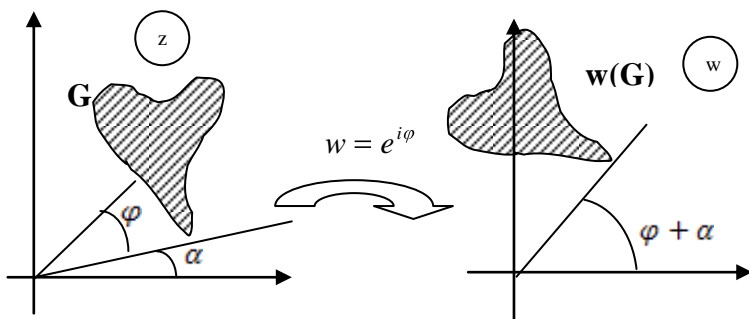


Рис.3

1.2. Дробно линейная функция (ДЛФ) $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, причем $\Delta := ad - bc \neq 0$.

Упражнение 1. Показать, что $w = \text{const}$ тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

При условии $\Delta \neq 0$, очевидно, выполняется $|c| + |d| > 0$. Будем предполагать, что $c \neq 0$, ибо в противном случае w превращается в рассмотренную выше линейную функцию, так как тогда $d \neq 0$.

Упражнение 2. Показать, что ДЛФ, доопределенная в точках $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$ по правилу $w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, $w(\infty) = \frac{a}{c} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d}$, отображает расширенную комплексную плоскость $\bar{\mathbb{C}}_z$ взаимно однозначно на $\bar{\mathbb{C}}_w$. Найти также вид функции, обратной к ДЛФ (она также будет ДЛФ).

Перечислим без доказательства основные свойства ДЛФ.

- 1) ДЛФ осуществляет конформное отображение $\bar{\mathbb{C}}_z$ на $\bar{\mathbb{C}}_w$.
- 2) ДЛФ полностью определяется тремя параметрами. Действительно, в предположении $c \neq 0$ тройка чисел $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{d}{c}$ полностью определяет ДЛФ, поскольку в этом случае

$$w = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Из свойства 2) следует, что если ДЛФ w в трех попарно различных точках z_1, z_2, z_3 принимает соответственно (попарно различные) значения w_1, w_2, w_3 , то из системы уравнений $w(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$, функция w восстанавливается однозначно. В случаях,

когда все z_j и $w_j, j=1,2,3$, конечны, чаще всего пользуются формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

- 3) ДЛФ отображает окружность или прямую в окружность или прямую (круговое свойство ДЛФ).
- 4) ДЛФ переводит пару симметричных относительно окружности точек в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.

Напомним, что точки a и b называются *симметричными относительно окружности* $\{z : |z-c|=R\}$ (рис.4), если

- 1) $|a-c| \cdot |b-c| = R^2$;
- 2) $\arg(a-c) = \arg(b-c)$.

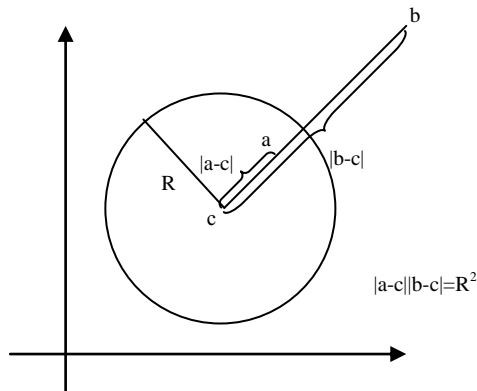


Рис.4

Здесь точка c считается симметричной бесконечно удаленной точке и наоборот. Симметричность точек относительно прямой понимается стандартным образом, что позволяет в свойство 4) включать прямые.

- 5) Всякое дробно линейное отображение (ДЛО) верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\{w : |w| < 1\}$ имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - a}{z - \bar{a}},$$

где $\operatorname{Im} a > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

- 6) Всякое ДЛО единичного круга $\{z : |z| < 1\}$ на себя имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

где $|a| < 1$.

- 7) Для того чтобы ДЛФ $w = \frac{az + b}{cz + d}$ отображала верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ на себя, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты a, b, c, d были вещественными и $ad - bc > 0$.

Рассмотрим различные типы задач на нахождение конформных отображений с помощью ДЛФ.

Задача 1. (№ 2.17(1) [1]) Найти ДЛФ w , переводящую точки $-1, i, 1+i$ соответственно в точки $0, 2i, 1-i$.

Решение. Применяя указанную после свойства 2) формулу, получаем

$$\frac{w-0}{w-2i} \cdot \frac{1-i-2i}{1-i-0} = \frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{1+i-i}{1+i+1}.$$

Отсюда

$$\frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{1}{2+i} = \frac{w}{w-2i} \cdot \frac{1-3i}{1-i}$$

и $(z+1)(w-2i)(1-i) = w(z-i)(2+i)(1-3i)$. Разрешив последнее равенство относительно w , получим

$$w = \frac{2i(z+1)(1-i)}{(z+1)(1-i) - (z-i)(1-3i)(2+i)} = \frac{2iz + 2i}{-4z + 1 + 5i}.$$

Ответ. $w = \frac{2iz + 2i}{-4z + 1 + 5i}.$

Упражнение 3. Решить задачу 1, используя свойство 2) ДЛФ.

Задача 2. (№ 2.18(2) [1]) Найти ДЛФ, переводящую точки -1 , ∞ , i соответственно в точки ∞ , i , 1 .

Решение. Искомую ДЛФ запишем в виде $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Так как

$$w(-1) = \infty, \text{ то } c \cdot (-1) + d = 0, \text{ т.е. } c = d \text{ и поэтому } w = \frac{az+b}{c(z+1)}.$$

Отсюда следует, что $c \neq 0$. Поделив числитель и знаменатель на c ,

$$\text{получаем } w = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z+1}. \text{ Далее, поскольку } w(\infty) = i, \text{ то } \frac{a}{c} = i, \text{ т.е.}$$

$$w = \frac{iz + \frac{b}{c}}{z+1}. \text{ Так как еще по условию } w(i) = 1, \text{ то получаем для оп-}$$

$$\text{ределения } \frac{b}{c} \text{ уравнение: } 1 = \frac{i^2 + \frac{b}{c}}{i+1}, \text{ откуда } \frac{b}{c} = 2+i.$$

$$\text{Окончательно имеем } w = \frac{iz + 2 + i}{z + 1}.$$

Ответ. $w = \frac{iz + 2 + i}{z + 1}.$

Задача 3. (№ 2.28(1) [1]) Найти ДЛФ w , отображающую верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы

$$w(i) = 0, \quad \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Решение. В силу свойства 5) ДЛФ w будем искать в виде $w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$, $\operatorname{Im} a > 0$. Используя первое условие задачи, получаем

$$0 = e^{i\varphi} \frac{i-a}{i-\bar{a}}.$$

Отсюда, $a = i$, $\bar{a} = -i$. Поэтому $w = e^{i\varphi} \frac{z-i}{z+i}$. Осталось найти параметр φ . Вычислим производную w' . Имеем

$$w' = e^{i\varphi} \frac{(z+i) - (z-i)}{(z+i)^2} = e^{i\varphi} \frac{2i}{(z+i)^2}.$$

В точке $z = i$

$$w'(i) = e^{i\varphi} \frac{2i}{(2i)^2} = \frac{e^{i\varphi}}{2i}.$$

Таким образом, $\arg w'(i) = \arg e^{i\varphi} - \arg(2i) = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Учитывая

второе условие задачи, получаем $-\frac{\pi}{2} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Отсюда $\varphi = 0$, и

искомая ДЛФ имеет вид $w = \frac{z-i}{z+i}$.

Ответ. $w = \frac{z-i}{z+i}.$

Задача 4. (№ 2.37(2) [1]) Найти ДЛФ w , отображающую единичный круг $\{z: |z| < 1\}$ на единичный круг $\{w: |w| < 1\}$ так, чтобы

$$w\left(\frac{i}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Поступаем так же, как и при решении предыдущей задачи, но пользуемся уже свойством б) ДЛФ. По этому свойству всякая ДЛФ, осуществляющая искомое отображение, имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1.$$

Из условия $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0$ находим, что $a = \frac{i}{2}$, т.е. $w = e^{i\varphi} \frac{z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{iz}{2}}$.

Далее,

$$w'(z) \Big|_{z=\frac{i}{2}} = e^{i\varphi} \frac{1 + \frac{iz}{2} - \left(z - \frac{i}{2}\right) \cdot \frac{i}{2}}{\left(1 + \frac{iz}{2}\right)^2} \Big|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{\frac{3}{4} e^{i\varphi}}{\left(1 + \frac{iz}{2}\right)^2} \Big|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{4}{3} e^{i\varphi}.$$

Учитывая второе условие, получаем

$$\frac{\pi}{2} = \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \arg \left(\frac{4}{3} e^{i\varphi}\right) = \varphi.$$

Таким образом, $w = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{i}{2}}{\frac{iz}{2} + 1} = i \cdot \frac{2z - i}{iz + 2} = \frac{2iz + 1}{iz + 2}.$

Ответ. $w = \frac{2iz + 1}{iz + 2}.$

Задача 5. Найти ДЛФ w , отображающую верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы $w(1) = i$, $w(i) = \frac{2+i}{5}$.

Решение. Согласно теореме 2, ДЛФ, отображающая верхнюю полуплоскость на единичный круг, границу $\{z : \operatorname{Im} z = 0\}$ этой полуплоскости отображает на границу $\{w : |w| = 1\}$ единичного круга. Точки i и $-i$ симметричны относительно вещественной оси, причем точка i отображается в точку $\frac{1}{5}(2+i)$. По свойству 4) ДЛФ

точка $-i$ перейдет в точку a , симметричную точке $\frac{1}{5}(2+i)$ относительно окружности $\{w : |w| = 1\}$. Найдем точку a , исходя из условий симметрии относительно окружности: $\frac{1}{5}|2+i| \cdot |a| = 1$ и

$\arg \frac{2+i}{5} = \arg a$. Из первого условия получим $|a| = \sqrt{5}$. Второе условие дает $a = \rho(2+i)$ с некоторым положительным числом ρ . На основании равенства $|a| = \rho|2+i|$ имеем $\rho = 1$ и $a = 2+i$.

Итак, искомая ДЛФ подчинена условиям: $w(1) = i$, $w(i) = \frac{2+i}{5}$,

$w(-i) = 2+i$. По схеме решения задачи 1 находим, что $w = \frac{(2+i)z - 5i}{(2i-1)z - 4i - 3}$.

Проверим, что найденная нами функция действительно отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг. Для этого достаточно записать полученную функцию в виде $w = -i \frac{z - (1+2i)}{z - (1-2i)}$ и применить свойство 5) ДЛФ.

Ответ. $w = \frac{(2+i)z - 5i}{(2i-1)z - 4i - 3}.$

Упражнение 4. Найти ДЛФ w , отображающую круг $\{z: |z| < 1\}$ на круг $\{w: |w| < 1\}$ так, чтобы $w(i) = i$, $w(i/2) = \frac{4i}{5}$.

Указание. Воспользоваться свойствами 4) и 6) ДЛФ.

Ответ. $w = \frac{2z+i}{2-iz}.$

Упражнение 5. Найти:

а) ДЛФ w , отображающую круг $\{z: |z| < 1\}$ на круг $\{w: |w| < 1\}$ так, что $w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$;

б) ДЛФ w , отображающую верхнюю полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг $\{w: |w| < 1\}$ так, что $w(1+i) = \frac{1}{2}$, $\arg w'(1+i) = \pi$.

Указание. Ввести промежуточную плоскость \mathbf{C}_ξ переменного ξ и отобразить фигурирующие в условии упражнения 5 области на некоторую область плоскости \mathbf{C}_ξ , взяв затем подходящую суперпозицию отображений. Например, для решения части а) находят две ДЛФ $\xi = \xi_1(z)$ и $\xi = \xi_2(w)$, удовлетворяющие условиям:

$$\xi_1: \{z: |z| < 1\} \rightarrow \{\xi: |\xi| < 1\}, \quad \xi_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg \xi_1'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$\xi_2: \{w: |w| < 1\} \rightarrow \{\xi: |\xi| < 1\}, \quad \xi_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg \xi_2'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Тогда искомая ДЛФ имеет вид $w = \xi_2^{-1}(\xi_1(z))$. На практике обычно записывают равенство $\xi_1(z) = \xi_2(w)$ и из него выражают w через z .

Ответ. а) $w = \frac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$; б) $w = \frac{(1-2i)z+3i-3}{(2-i)z+3i-3}$.

1.3. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \lambda(z)$.

Перечислим ее основные свойства.

- 1) Функция Жуковского однолистка в области $D \subset \overline{C}_z$ тогда и только тогда, когда D не содержит ни одной пары точек z_1 и z_2 , связанных соотношением $z_1 \cdot z_2 = 1$.
- 2) Отображение $w = \lambda(z)$ конформно в любой точке, отличной от точек $z = \pm 1$.
- 3) При отображении функцией Жуковского:

- окружности $\{z : |z| = r\}$ и $\left\{z : |z| = \frac{1}{r}\right\}$, $0 < r < 1$, переходят в один и тот же эллипс с фокусами в точках ± 1 и полуосями $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \pm r \right)$;
- окружность $\{z : |z| = 1\}$ отображится на отрезок $[-1; 1]$, проходимый дважды; при этом, когда точка z пробегает против часовой стрелки верхнюю полуокружность $\{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, точка $w = \lambda(z)$ пробегает отрезок $[-1; 1]$ от точки $w = 1$ до точки $w = -1$; когда же z пробегает нижнюю полуокружность $\{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ против часовой стрелки, точка $w = \lambda(z)$ пробегает тот же отрезок от точки $w = -1$ до точки $w = 1$;

- лучи $[0; +\infty]$ и $[-\infty; 0]$ переходят соответственно в лучи $[1; +\infty]$ и $[-\infty; -1]$, проходимые дважды. Если z пробегает луч $[0; +\infty]$, то когда z возрастает от 0 до 1, $w = \lambda(z)$ проходит луч $[1; +\infty]$ справа налево, а когда z возрастает от 1 до $+\infty$, то точка w пробегает этот же луч слева направо.

4) Функция Жуковского конформно отображает:

- круг $\{z : |z| < r\}$ (так же, как и внешность $\{z : |z| > r\}$ его замыкания) на всю плоскость с разрезом по отрезку $[-1; 1]$ (рис.5).

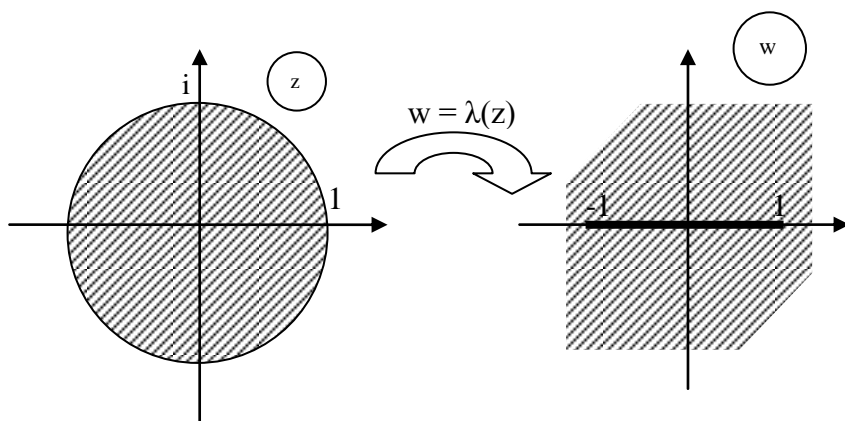


Рис.5

- полукруг $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, а полукруг $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ – на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис.6);

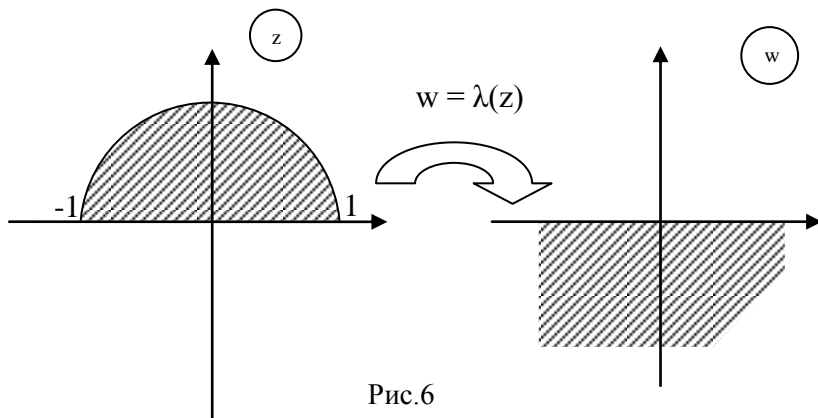


Рис.6

- верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ (так же, как и нижнюю $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$) на плоскость C_w с разрезом по лучам $[-\infty; -1]$ и $[1; +\infty]$ (рис.7).

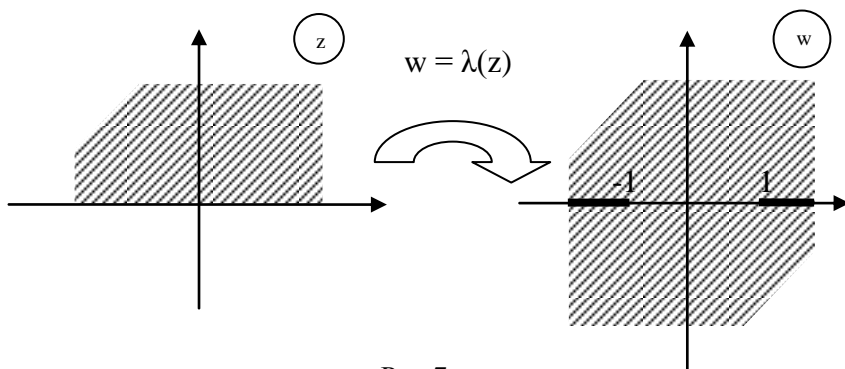


Рис.7

Задача 6. (№ 2.112 [1]) Найдите образ лежащей в единичном круге области $D = \{z : |z| < 1, z \notin [c; 1]\}$ при отображении функцией Жуковского, если а) $c = \frac{1}{2}$; б) $c = -\frac{1}{2}$.

Решение. По свойству 4) круг $\{z : |z| < 1\}$ отобразится функцией Жуковского на всю плоскость с разрезом по отрезку $[-1; 1]$. Обозначим эту область через G_1 . Найдём образ промежутка $[c; 1]$ при отображении $w = \lambda(z)$ и исключим его из области G_1 . Это и будет искомая область. Случаи а) и б) рассмотрим отдельно.

а) $c = \frac{1}{2}$. Функция $w = \lambda(z)$ непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, а её производная $\lambda'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) < 0$ для всех $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Значит, на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ функция Жуковского монотонно убывает от значения $w = \lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$ до значения $w = \lambda(1) = 1$, принимая все промежуточные значения. Таким образом, промежуток $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ перейдет в промежуток $\left[1; \frac{5}{4}\right]$.

б) $c = -\frac{1}{2}$. Разобьём промежуток $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ на два: $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ и $[0; 1]$, на каждом из которых функция $w = \lambda(z)$ непрерывна и монотонна. Действуя как в случае а), показываем, что первый отрезок переходит в луч $\left[-\infty; -\frac{5}{4}\right]$, а второй – в луч $[1; +\infty]$. Поэтому весь промежуток $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ переходит в объединение двух лучей

$\left[-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup [1; +\infty]$. Итак, образом области D при отображении функцией Жуковского является:

при $c = \frac{1}{2}$ – вся комплексная плоскость с разрезом по отрезку $[-1; 1] \cup \left[1; \frac{5}{4}\right] = \left[-1; \frac{5}{4}\right]$;

при $c = -\frac{1}{2}$ – вся комплексная плоскость с разрезом по лучам $\left[-\infty; -\frac{5}{4}\right]$ и $[-1; +\infty] = [-1; 1] \cup [1; +\infty]$. При этом в обоих случаях отображение является конформным.

Задача 7. Отобразить конформно на всю плоскость с разрезом по лучу $[0; +\infty]$ область $D = \{z : |z| > 1, z \notin [-2; -1] \cup [1; 2]\}$.

Решение. Функция Жуковского $w_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно отображает по свойству 4) внешность $\{z : |z| > 1\}$ замкнутого единичного круга на всю плоскость \mathbf{C}_{w_1} с разрезом по отрезку $[-1; 1]$.

Как и в задаче 1, получаем, что отрезок $[-2; -1]$ при этом отображается на отрезок $\left[-\frac{5}{4}; -1\right]$, а образом отрезка $[1; 2]$ будет $\left[1; \frac{5}{4}\right]$. Поэтому функция w_1 отображит область D на область G_1 – всю плоскость \mathbf{C}_{w_1} с разрезом по отрезку $\left[-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right]$ (рис. 8).

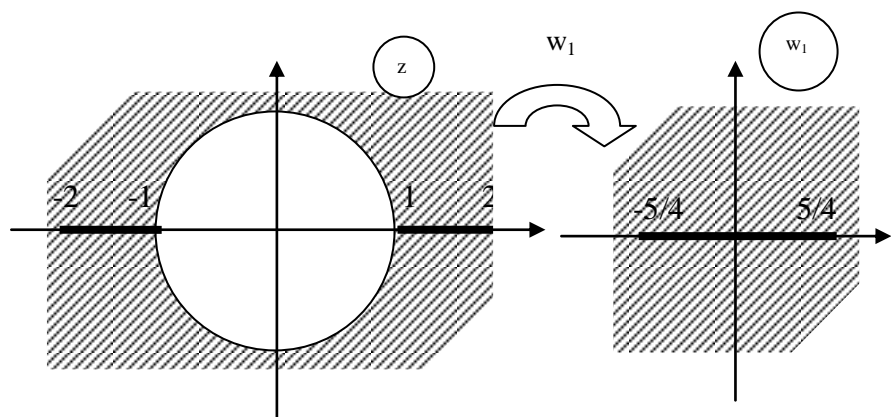


Рис.8

Подберем ДЛФ w , переводящую G_1 на всю плоскость C_w с разрезом по лучу $[0; +\infty]$ (рис.9).

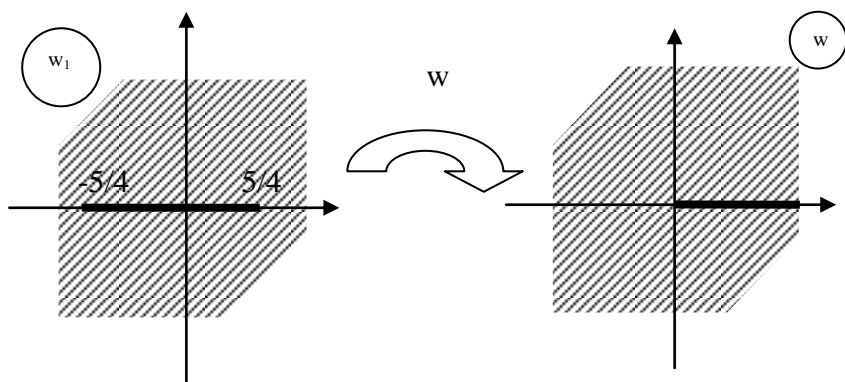


Рис.9

Применяя свойства ДЛФ, легко проверить, что в качестве такой функции подойдет, например, $w = \frac{\frac{5}{4} + w_1}{\frac{5}{4} - w_1} = \frac{5 + 4w_1}{5 - 4w_1}$. Искомую функцию составляет суперпозиция двух указанных выше отобра-

жений w и w_1 :
$$w = \frac{5 + 4 \cdot \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}{5 - 4 \cdot \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{2z^2 + 5z + 2}{-2z^2 + 5z - 2}.$$

Ответ. $w = \frac{2z^2 + 5z + 2}{-2z^2 + 5z - 2}.$

Упражнение 6. Найти какие-либо функции $w = w(z)$, осуществляющие конформные отображения следующих областей (рис.10 – рис.12) на плоскость с разрезом по лучу $[0; +\infty]$.

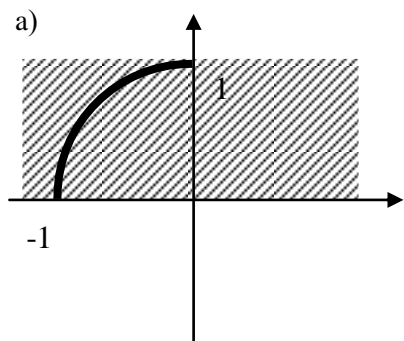


Рис.10

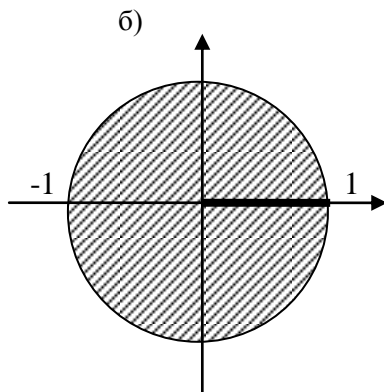


Рис.11

в)

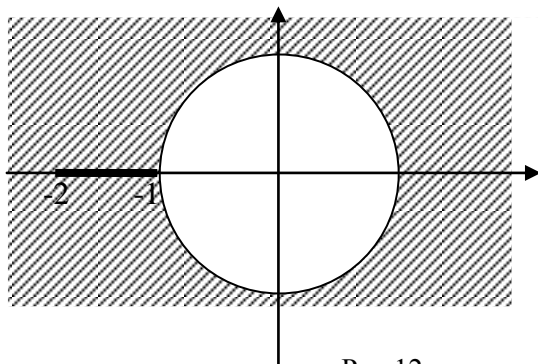


Рис.12

Ответ. а) $w = \frac{z^2 + 1}{(z - 1)^2}$; б) $w = \frac{(z + 1)^2}{2z}$; в) $w = \frac{2z^2 + 5z + 2}{-(z - 1)^2}$.

1.4. Степенная функция $w = z^\alpha \equiv |z|^\alpha \cdot e^{i\alpha \arg z}$, $0 < \arg z < 2\pi$, $\alpha > 0$ (в общем случае это многозначная функция, однако, нам вполне достаточно указанного определения степенной функции).

Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ рассматривается только одна ветвь двужанной функции

$w = \sqrt{z}$, действующая по правилу $z \mapsto |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \arg z}$.

Перечислим некоторые свойства этой функции.

- 1) Функция $w = z^\alpha$ является однолистной в угле $\left\{ z : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{\alpha} \right\}$.

2) Функция $w = z^\alpha$ отображает луч $\{z : \arg z = \gamma\}$, $0 < \gamma < \frac{2\pi}{\alpha}$, на луч $\{w : \arg w = \alpha\gamma\}$.

3) Степенная функция конформно отображает:

- сектор $\{z : |z| < r, 0 < \arg z < \beta\}$, $0 < \beta \leq \frac{2\pi}{\alpha}$, на сектор $\{w : |w| = r^\alpha, 0 < \arg w < \alpha\beta\}$ (рис.13).

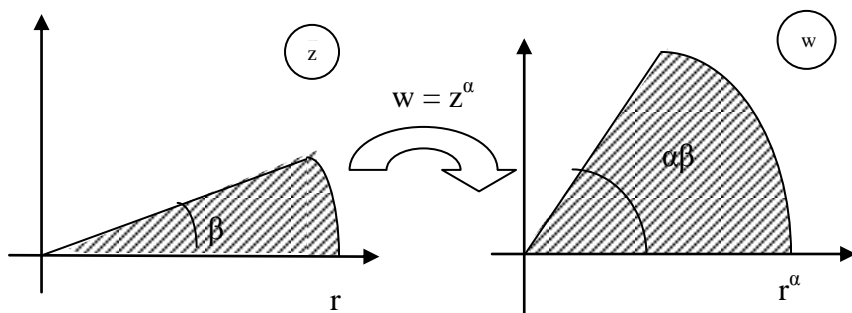


Рис.13

- угол $\{z : 0 < \arg z < \beta\}$, $0 < \beta \leq \frac{2\pi}{\alpha}$, на угол $\{w : 0 < \arg w < \alpha\beta\}$ (рис.14).

Упражнение 7. Проверить, что:

а) степенная функция $w = z^2$ отображает конформно первый квадрант $\left\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : 0 < \arg w < \pi\}$ (рис.15), а также верхнюю полуплоскость

$\{z : 0 < \arg z < \pi\}$ на плоскость с разрезом по положительному лучу, т.е. на область $\{w : 0 < \arg w < 2\pi\}$ (рис.16).

б) функция $w = \sqrt{z}$ отображает плоскость с разрезом по лучу $[0; +\infty]$, т.е. область $\{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$, на верхнюю полуплоскость.

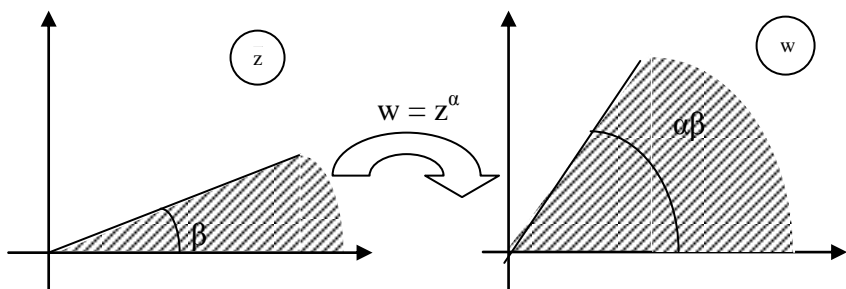


Рис.14

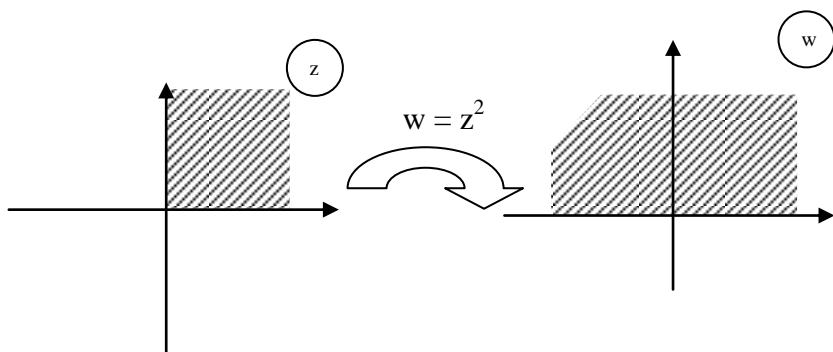


Рис.15

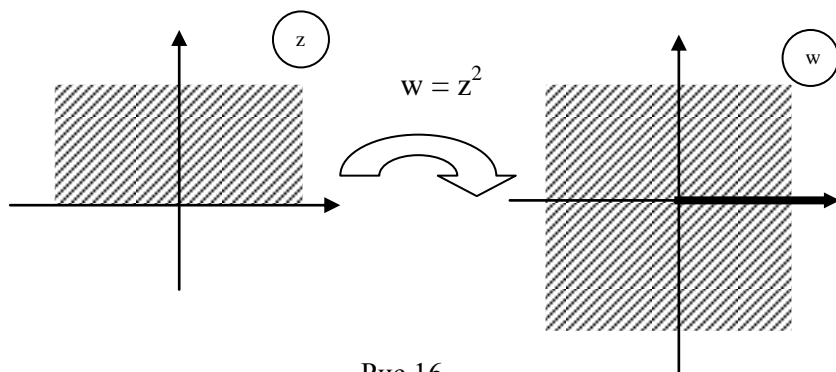


Рис.16

Рассмотрим вопрос об отображении круговой луночки на примере типичной задачи. Метод решения подобных задач состоит в том, чтобы с помощью ДЛЮ «распрямить» границы области, отправив одну общую граничную точку в 0 , а другую в ∞ . При этом круговая луночка отображается на некоторый угол с вершиной в начале координат. С помощью степенной функции полученный угол разворачивают до угла раствора π , который уже не сложно отобразить на верхнюю полуплоскость.

Задача 8. (№ 2.91(1) [1]) *Отобразить круговую луночку $|z| < 1$, $|z - i| < 1$ (рис.17) на верхнюю полуплоскость.*

Решение. Граница области G (круговой луночки) состоит из дуг $\gamma_1 = \tilde{A}OB$ и $\gamma_2 = \tilde{A}CB$ двух окружностей, изображенных на рис. 17. Так как $OC = CB = OB = 1$, то, очевидно, точка A изо-

бражает комплексное число $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, а точка B – число

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

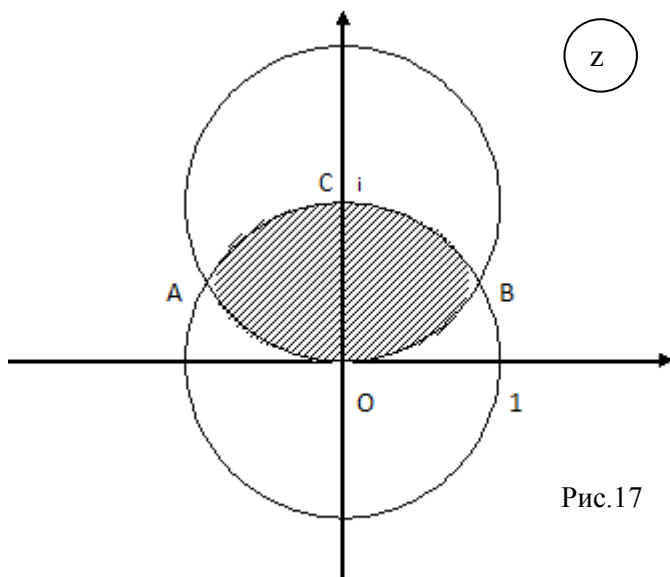


Рис.17

«Распрямяем» границы γ_1 и γ_2 , отображая z_1 в ∞ , z_2 в 0 с помощью ДЛФ

$$w_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - z}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - z} = \frac{2z - \sqrt{3} - i}{2z + \sqrt{3} - i}.$$

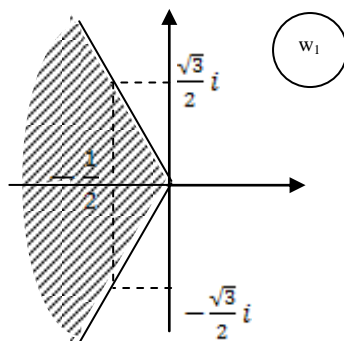
Поскольку $w_1(i) = \frac{2i - \sqrt{3} - i}{2i + \sqrt{3} - i} = \frac{i - \sqrt{3}}{i + \sqrt{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, то γ_2 переводится отображением w_1 в луч, выходящий из точки $w_1 = 0$ и проходящий через точку $w_1(i) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Аналогичным образом устанавливаем, что γ_1 переходит в луч, выходящий из точки $w_1 = 0$ и проходящий через точку

$$w_1(0) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

При этом образом исходной круговой луночки в плоскости C_{w_1} будет угол G_1 раствора $\frac{2\pi}{3}$, сторонами которого являются указанные лучи (рис.18). (Проверьте!)

Рис.18



Повернем G_1 на угол $\frac{2\pi}{3}$ по часовой стрелке, чтобы получить область, изображенную на рис.19. Для этого воспользуемся отображением

$$w_2 = w_1 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$$

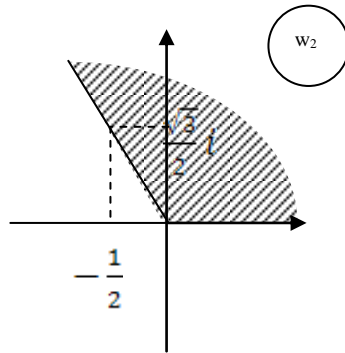


Рис.19

Отображение

$$w = w_2^{\frac{3}{2}}$$

развернет угол G_2 до угла раствора π , совпадающего с верхней полуплоскостью (рис.20).

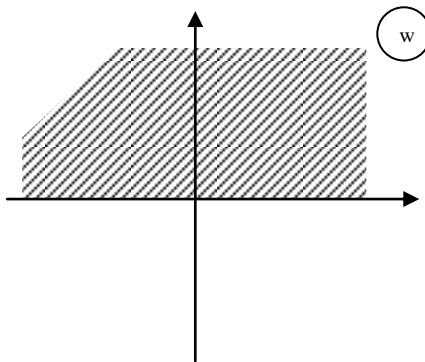


Рис.20

Итак,

$$w = \left(w_1 \cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2z - \sqrt{3} - i}{2z + \sqrt{3} - i} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\pi i} = - \left(\frac{2z - \sqrt{3} - i}{2z + \sqrt{3} - i} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ. $w = - \left(\frac{2z - \sqrt{3} - i}{2z + \sqrt{3} - i} \right)^{\frac{3}{2}}.$

1.5. Показательная функция

Основные свойства функции $w = e^z = e^{x+iy} \equiv e^x (\cos y + i \sin y)$:

- 1) Функция $w = e^z$ отображает однолистно прямую $\{z : \operatorname{Im} z = b\}$ на луч $\{w : \arg w = b\}$.
- 2) Функция $w = e^z$ однолистна в любой области, не содержащей никакой пары точек z_1 и z_2 , связанных соотношением $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$.
- 3) Функция $w = e^z$ конформно отображает:
 - полосу $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ на плоскость с разрезом по положительному лучу, т.е. на область $\{w : 0 < \arg w < 2\pi\}$ (рис.21).
 - полосу $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис.22).
 - левую полуполосу $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z < 0\}$ на единичный круг с разрезом по отрезку $[0;1]$: $\{w : |w| < 1, 0 < \arg w < 2\pi\}$ (рис.23).

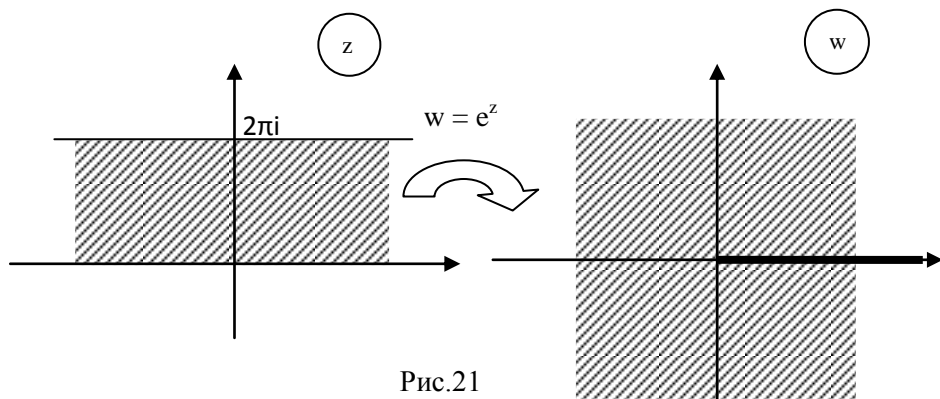


Рис.21

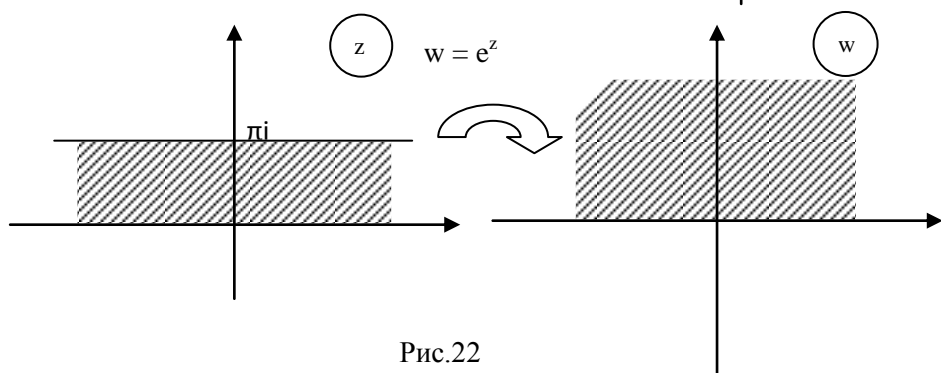


Рис.22

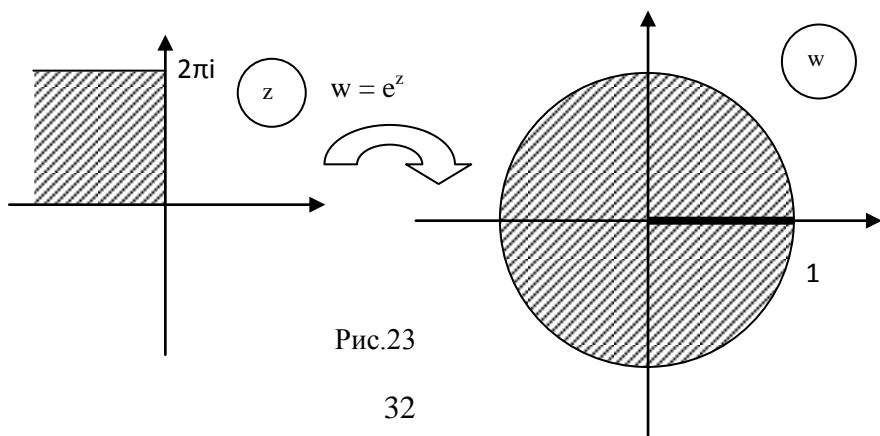


Рис.23

- левую полуполосу $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z < 0\}$ на единичный полукруг $\{w: |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$, лежащий в верхней полуплоскости (рис.24).

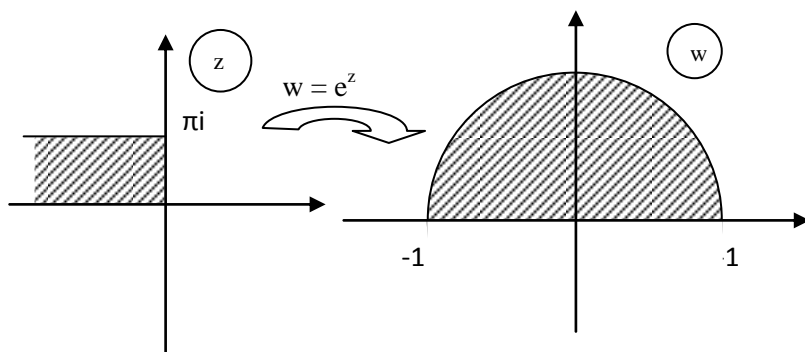


Рис.24

Рассмотрим еще одну задачу об отображении круговой луночки. При решении этой задачи оказывается полезной показательная функция $w = e^z$.

Задача 9. (№ 2.158 [1]) Отобразить круговую луночку, ограниченную окружностями $|z| = 2$, $|z - 1| = 1$ (рис.25), на верхнюю полуплоскость.

Решение. Граница области G состоит из двух окружностей: $\gamma_1 = \{z: |z| = 2\}$ и $\gamma_2 = \{z: |z - 1| = 1\}$ с общей точкой B , изображающей число $z_1 = 2$.

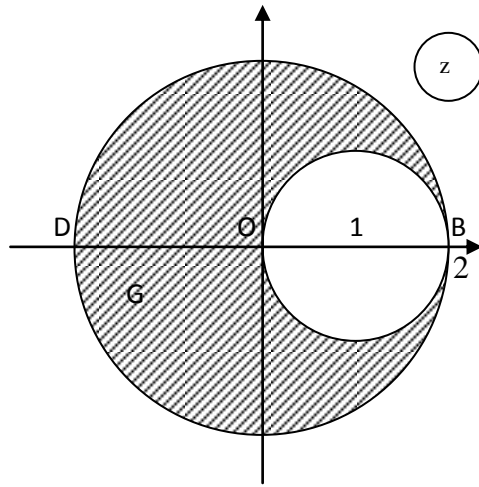


Рис.25

В точках O ($z_2 = 0$) и D ($z_3 = -2$) контуры γ_1 и γ_2 перпендикулярны вещественной оси. ДЛФ $w_1 = \frac{z}{z-2}$ переводит z_1 в ∞ , вещественную ось плоскости C_z в вещественную ось плоскости C_{w_1} , а окружности γ_1 и γ_2 соответственно в прямые l_1 и l_2 , перпендикулярные вещественной оси и проходящие через точки $w_1(0) = 0$ и $w_1(-2) = \frac{1}{2}$. Так как $w_1(-1) = \frac{1}{3}$, то G отображается в полосу G_1 (рис.26).

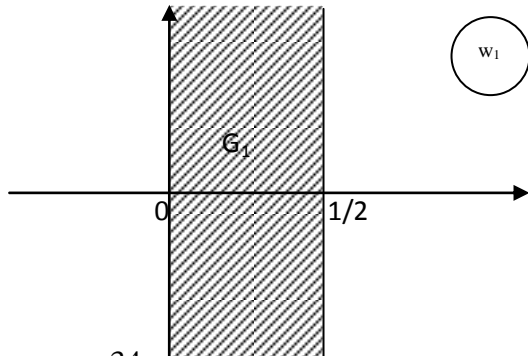
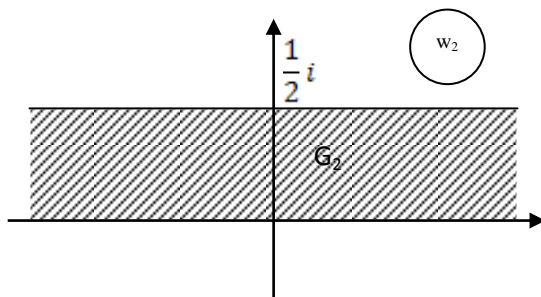


Рис.26

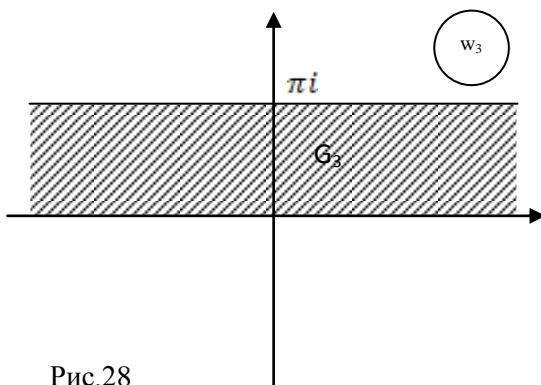
Функция $w_2 = w_1 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$ поворачивает полосу G_1 на угол $\frac{\pi}{2}$, переводя ее в горизонтальную полосу ширины $\frac{1}{2}$ (рис.27).

Рис.27



Отображение $w_3 = 2\pi w_2$ растягивает полосу G_2 до полосы G_3 ширины π (рис.28).

Рис.28



Согласно свойствам экспоненты, $w = e^{w_3}$ отобразит последнюю полосу на верхнюю полуплоскость (рис.29).

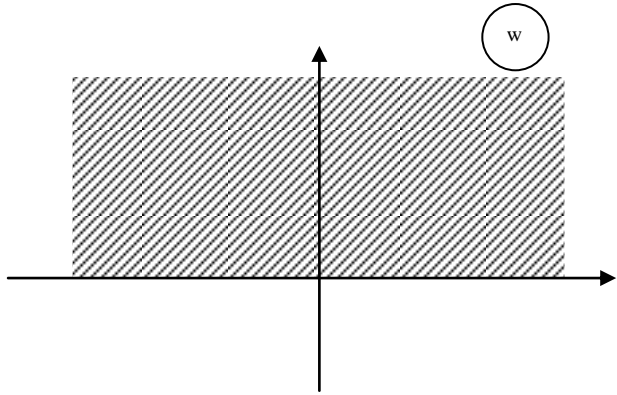


Рис.29

Таким образом,

$$w = \exp\left(2\pi e^{\frac{\pi}{2}i} \frac{z}{z-2}\right) = e^{\frac{2\pi iz}{z-2}}.$$

Ответ. $w = e^{\frac{2\pi iz}{z-2}}$.

1.6. Логарифмическая и тригонометрические функции

В этом разделе будут рассмотрены некоторые задачи, в которых отображения областей осуществляются посредством функций $w = \ln z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{tg} z$.

Под функцией $w = \ln z$ понимается, как обычно, главная ветвь бесконечнозначной функции $\operatorname{Ln} z := \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $\ln z := \ln|z| + i \arg z$, $z \neq 0$. Стандартным образом определя-

ются и используемые ниже тригонометрические функции. Например, $\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}$.

Задача 10. (№ 2.148 [1]) Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = \ln z$:

- 1) полярная сетка $|z| = R$, $\arg z = \theta$;
- 2) логарифмические спирали $r = Ae^{k\varphi}$ ($A > 0$);
- 3) угол $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$;
- 4) сектор $|z| < 1$, $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$;
- 5) кольцо $r_1 < |z| < r_2$ с разрезом по отрезку $[r_1; r_2]$.

Решение. 1) При фиксированном $R > 0$ окружность $|z| = R$ главной ветвью логарифма отображается на множество точек вида $w = \ln z = \ln R + i\varphi$, $\varphi \in (0; 2\pi]$, представляющее собой вертикальный полуинтервал $\{w = u + iv : u = \ln R, 0 < v \leq 2\pi\}$. Таким образом, семейство окружностей $|z| = R$ переходит в семейство указанных полуинтервалов, заполняющих полосу $0 < \operatorname{Im} w \leq 2\pi$.

Далее, всякий луч $\arg z = \theta$ преобразуется при отображении $w = \ln z$ в горизонтальную прямую $\operatorname{Im} w = \theta$. Семейство лучей $\arg z = \theta$ ($0 < \theta \leq 2\pi$) переходит в семейство горизонтальных прямых, также заполняющих полосу $0 < \operatorname{Im} w \leq 2\pi$.

Значит, полярная сетка переводится рассматриваемым отображением в прямоугольную сетку, «накинутую» на полосу $0 < \operatorname{Im} w \leq 2\pi$ (рис.30).

2) Если точка $z = re^{i\varphi}$ лежит на логарифмической спирали $r = Ae^{k\varphi}$ ($A > 0$), то ее образ можно, очевидно, записать в виде: $w = \ln z = \ln r + i\varphi = \ln(Ae^{k\varphi}) + i\varphi = \ln A + k\varphi + i\varphi$. Полагая те-

перь $u = \ln A + k\varphi$ и $v = \varphi$, получаем, что образ указанной спирали есть прямая $u = \ln A + kv$ (рис.31).

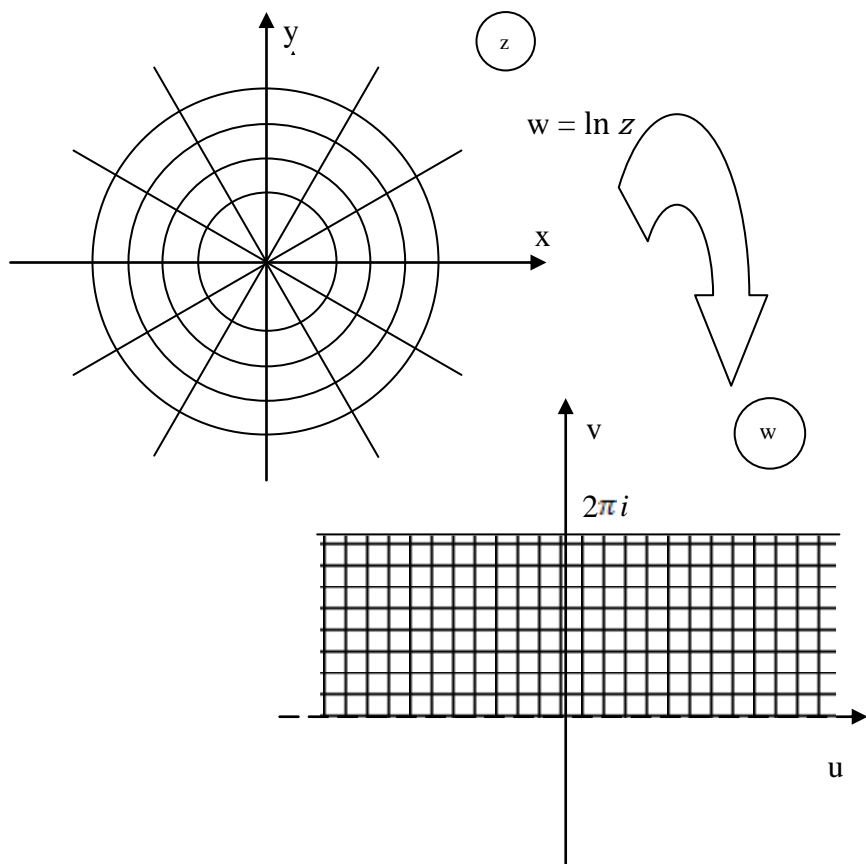


Рис.30

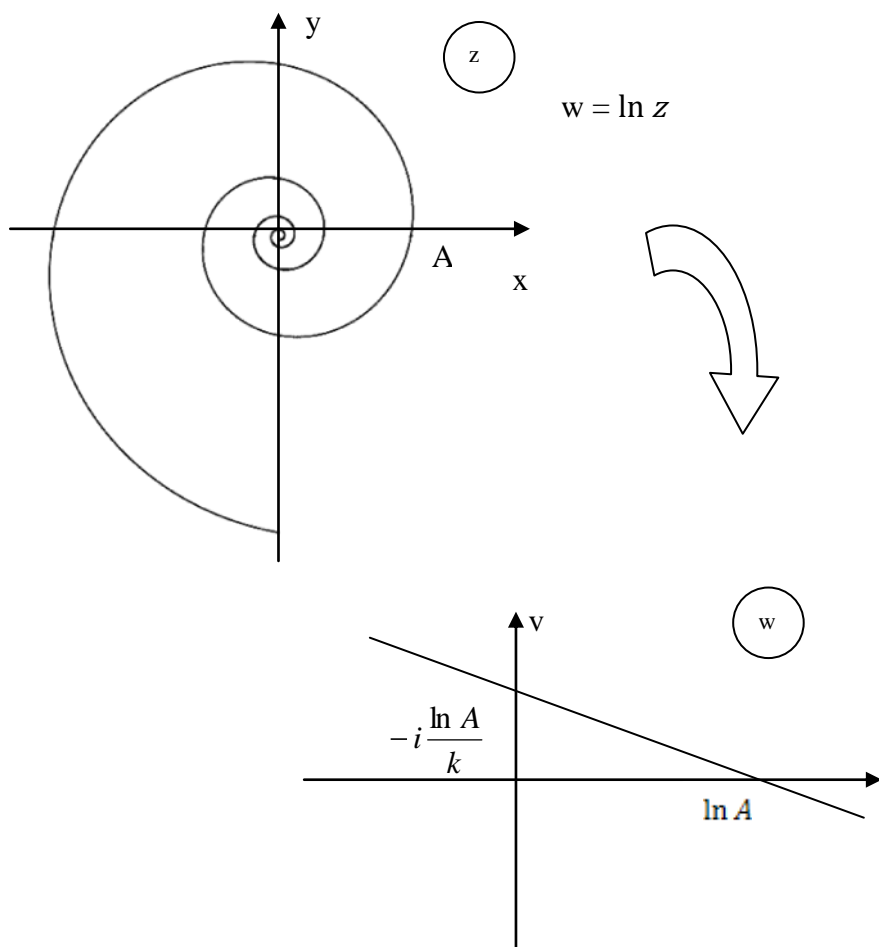


Рис.31

Упражнение 8. Используя пункт 1), убедиться, что образом угла из пункта 3) задачи 10 является полоса $0 < \operatorname{Im} w < \alpha$, изо-

браженная на рис.32, а образом сектора из пункта 4) является полуполоса $0 < \operatorname{Im} w < \alpha$, $\operatorname{Re} w < 0$ (рис.33).

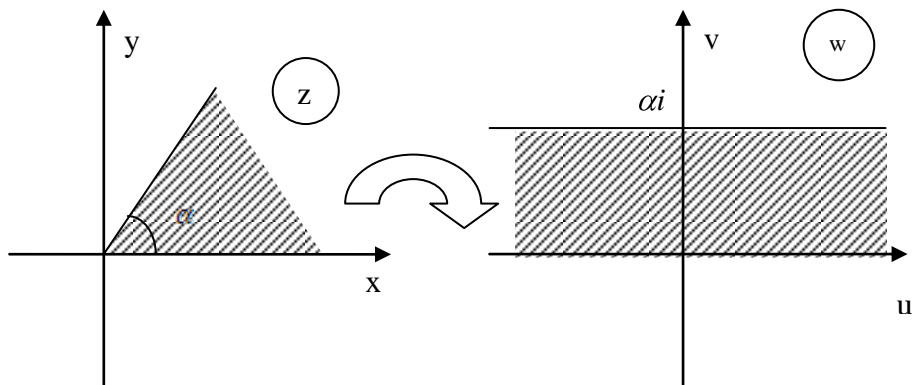


Рис.32

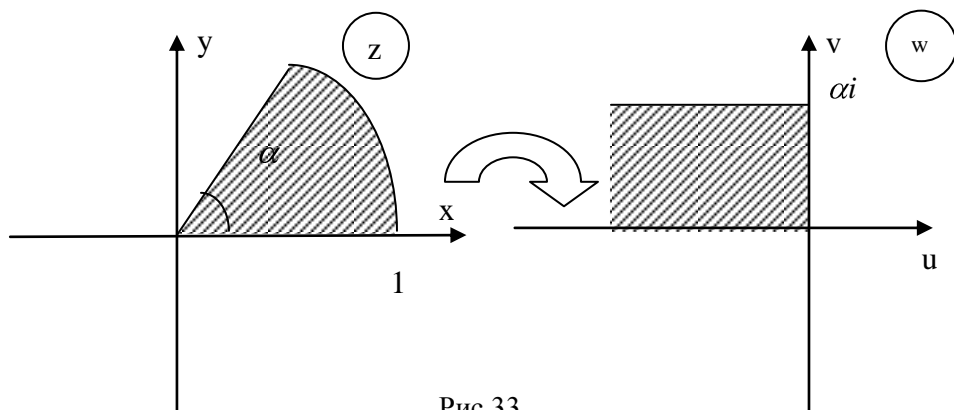


Рис.33

5) Согласно пункту 1) окружности $\{|z| = r_1\} \setminus \{r_1\}$ и $\{|z| = r_2\} \setminus \{r_2\}$ перейдут соответственно в вертикальные интервалы $\{w : \operatorname{Re} w = \ln r_1, 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$, $\{w : \operatorname{Re} w = \ln r_2, 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$. Кроме того, верхний борт (ему соответствует $\varphi = 0$) разреза

$(r_1; r_2)$ отображается в горизонтальный интервал $(\ln r_1; \ln r_2)$, а нижний борт (ему соответствует $\varphi = 2\pi$) – также в горизонтальный интервал, но уже вида $\{w: \operatorname{Im} w = 2\pi, \ln r_1 < \operatorname{Re} w < \ln r_2\}$. Подводя итог рассуждениям, заключаем, что образом данного кольца с разрезом является открытый прямоугольник, изображенный на рис.34.

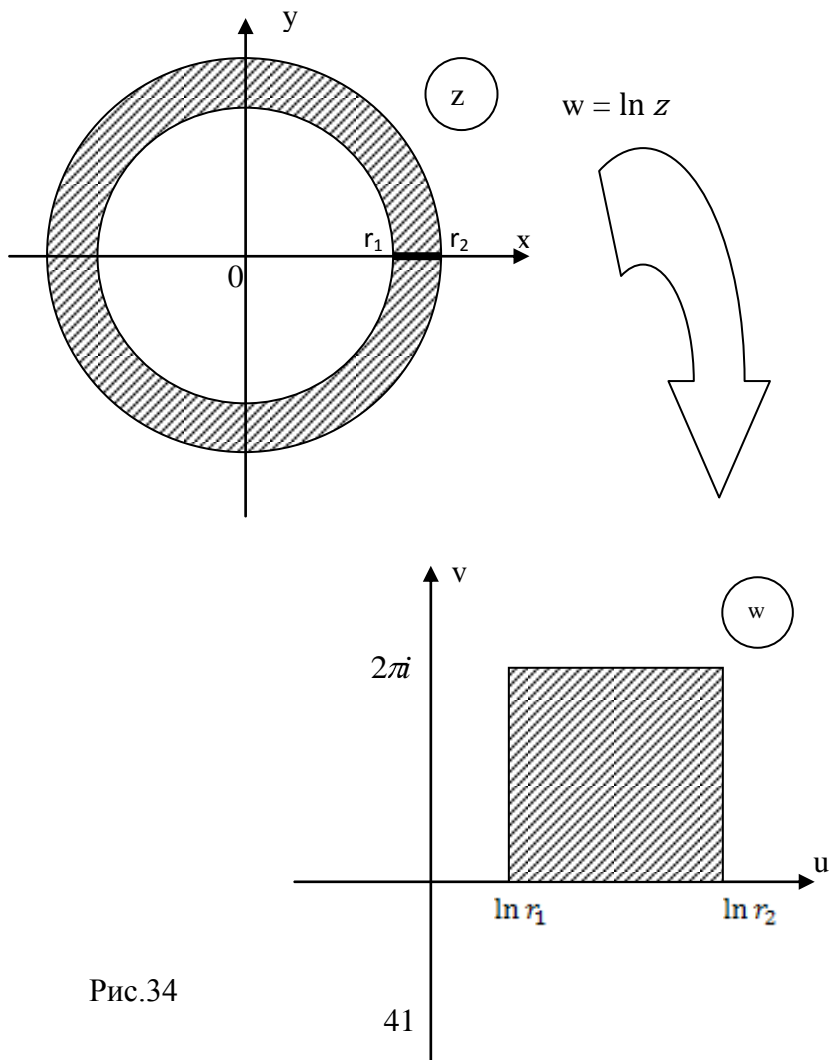


Рис.34

Решение двух следующих задач существенно опирается на хорошо известные формулы:

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

вытекающие из определений тригонометрических функций и свойств экспоненты.

Задача 11. (№ 2.150 [1]) *Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = \cos z$:*

- 1) *прямоугольная сетка $x = C$, $y = C$;*
- 2) *полуполоса $0 < x < \pi$, $y < 0$;*
- 3) *полуполоса $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$;*
- 4) *полуполоса $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$;*
- 5) *полоса $0 < x < \pi$;*
- 6) *прямоугольник $0 < x < \pi$, $-h < y < h$ ($h > 0$).*

Решение. 1) Отобразим вертикальную линию сетки $x = C$:

$$w = \cos z = \cos(C + iy) = \cos C \operatorname{ch} y - i \sin C \operatorname{sh} y =: u + iv.$$

Поскольку $u^2 = \cos^2 C \operatorname{ch}^2 y$, $v^2 = \sin^2 C \operatorname{sh}^2 y$, то при каждом значении $C \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbf{Z}$, получаем

$$\frac{u^2}{\cos^2 C} - \frac{v^2}{\sin^2 C} = 1.$$

Итак, точка w принадлежит гиперболе с полуосями $a = |\cos C|$, $b = |\sin C|$ (ее фокусы находятся в точках $w = \pm 1$). Предлагаем читателю самостоятельно проверить, что в зависимости от выбора C прямая $x = C$ переходит в определенную ветвь указанной гиперболы.

При $C = \pi k, k \in \mathbf{Z}$:

$$w = \cos z = \cos(\pi k + iy) = (-1)^k \operatorname{ch} y.$$

Следовательно, если k четное, то образом любой прямой $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, является луч $[1; +\infty)$; при нечетном k образом прямой $x = \pi(2n + 1), n \in \mathbf{Z}$, является луч $(-\infty; 1]$.

Для $C = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ имеем:

$$w = \cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k + iy\right) = (-1)^{k+1} i \operatorname{sh} y.$$

Значит, образом прямых $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$, является мнимая ось. На рис.35 помещены образы вертикальных линий (на рис.36 – найденные ниже образы горизонтальных линий).

Отобразим горизонтальную линию сетки $y = C$:

$$w = \cos z = \cos(x + iC) = \cos x \operatorname{ch} C - i \sin x \operatorname{sh} C =: u + iv.$$

Так как $u^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 C$, $v^2 = \sin^2 x \operatorname{sh}^2 C$, то при $C \neq 0$ имеем:

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1.$$

Значит, точка w принадлежит эллипсу с полуосями $a = \operatorname{ch} C$, $b = |\operatorname{sh} C|$ (его фокусы находятся в точках $w = \pm 1$).

При $C = 0$ запишем $w = \cos z = \cos x$. Отсюда видно, что образом прямой $y = 0$ является отрезок вещественной оси $[-1; 1]$.

Ответ. Образом прямоугольной сетки при отображении $w = \cos z$ является семейство, состоящее из софокусных гипербол

$$\frac{u^2}{\cos^2 C} - \frac{v^2}{\sin^2 C} = 1 \quad (C \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbf{Z}), \quad \text{софокусных эллипсов}$$

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1 \quad (C \neq 0), \quad \text{вещественной и мнимой осей.}$$

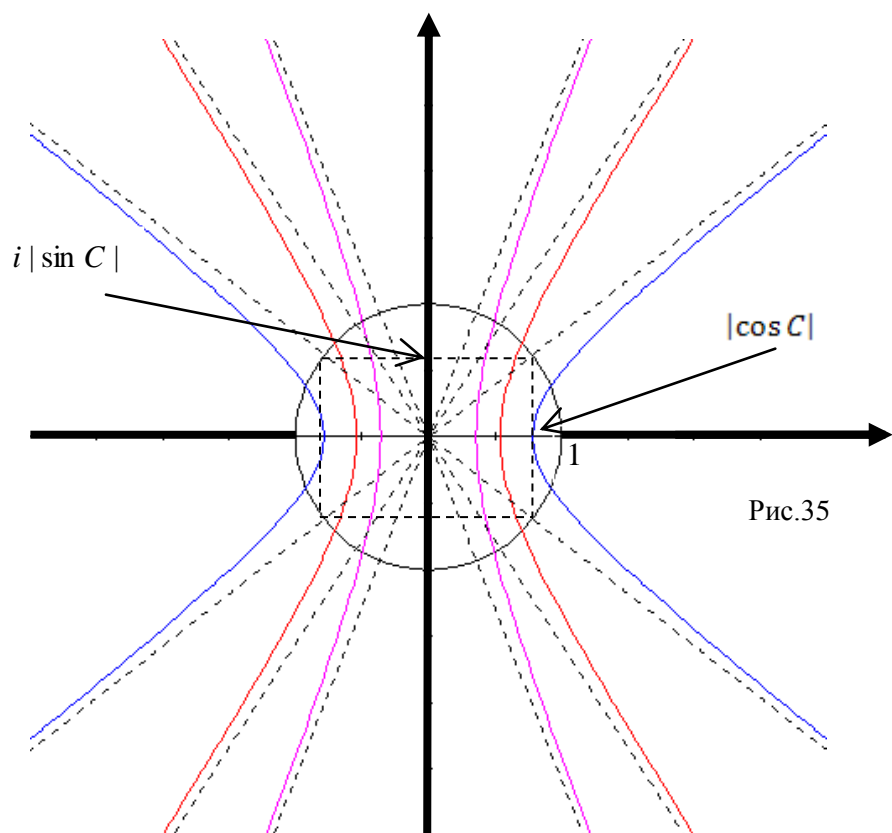


Рис.35

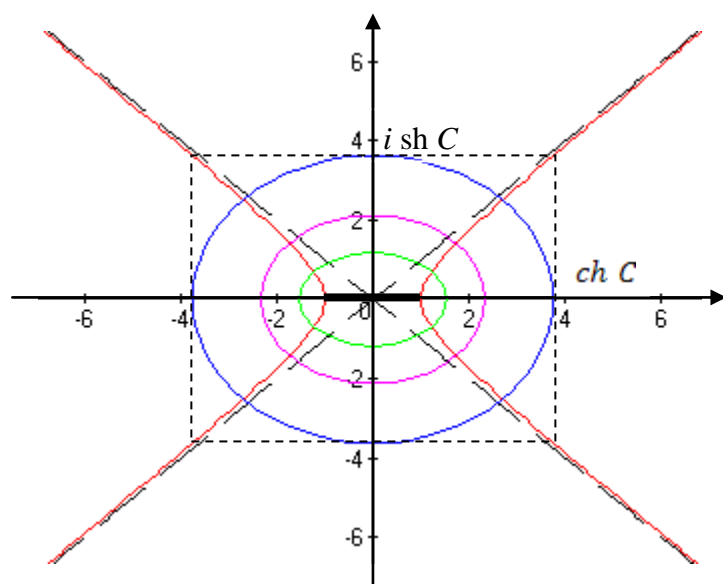


Рис.36

2) Отобразим границу полуполосы, состоящую из двух лучей $\{z = x + iy : x = 0, y \leq 0\}$, $\{z = x + iy : x = \pi, y \leq 0\}$ и отрезка $[0; \pi]$ вещественной оси. Из пункта 1) получаем, что образом этого множества является вещественная ось. Чтобы определить, какая из полуплоскостей является образом полуполосы, найдем образ точки

$$z = \frac{\pi}{2} - \pi i :$$

$$w\left(\frac{\pi}{2} - \pi i\right) = \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{ch}(-\pi) - i \sin \frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(-\pi) = i \operatorname{sh} \pi .$$

Так как $\operatorname{sh} \pi > 0$, то образом исходной полуполосы является верхняя полуплоскость (рис.37).

Ответ. Образом полуполосы $0 < x < \pi$, $y < 0$ при отображении $w = \cos z$ является верхняя полуплоскость.

3) Граница рассматриваемой здесь области состоит из двух лучей $\{z = x + iy : x = 0, y \geq 0\}$, $\left\{z = x + iy : x = \frac{\pi}{2}, y \geq 0\right\}$ и от-

резка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ вещественной оси. Пользуясь пунктом 1), получаем,

что образом границы является объединение положительной вещественной полуоси и отрицательной мнимой полуоси. Так как

$$w\left(\frac{\pi}{4} + \pi i\right) = \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{ch} \pi - i \sin \frac{\pi}{4} \operatorname{sh} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{ch} \pi - i \operatorname{sh} \pi)$$

и $\operatorname{ch} \pi > 0$, $\operatorname{sh} \pi > 0$, то образом данной полуполосы является четвертый квадрант (рис.38).

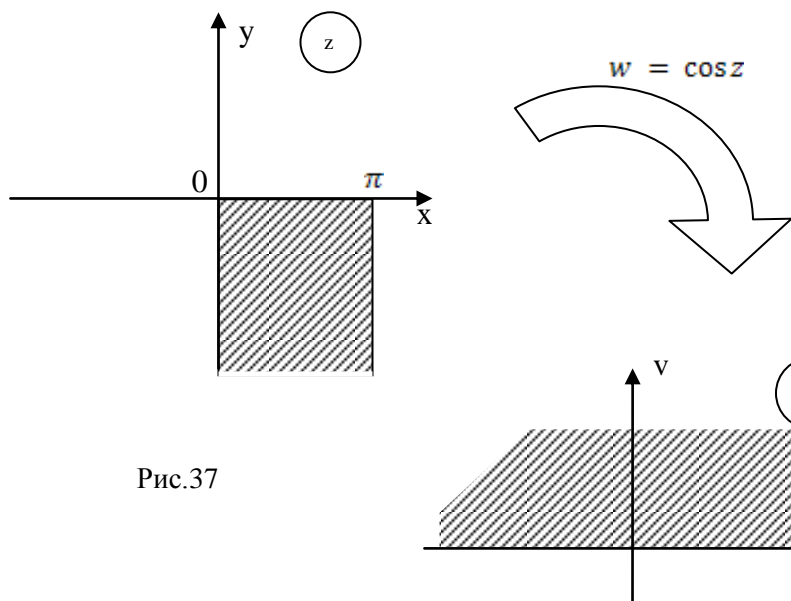


Рис.37

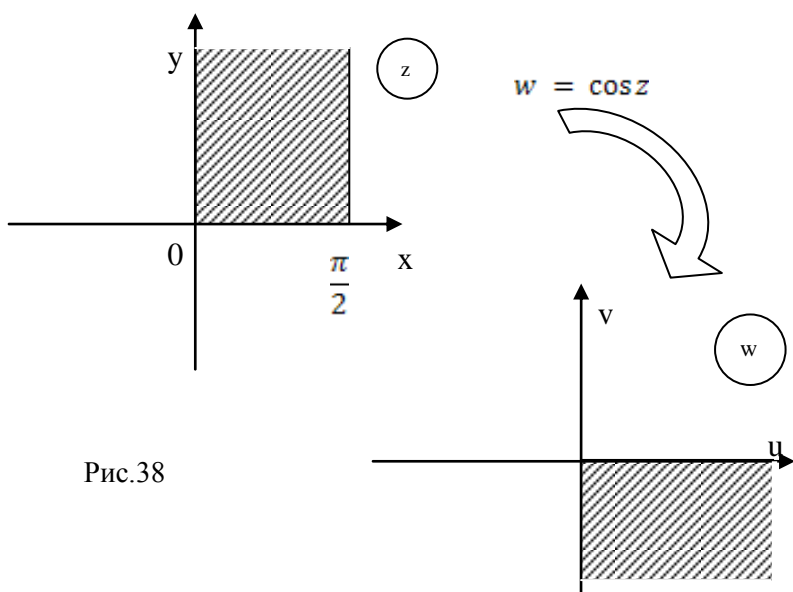


Рис.38

Ответ. Образом полуполосы $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$ при отображении $w = \cos z$ является четвертый квадрант.

4) Отобразим границу указанной в этом пункте полуполосы. Луч

$$\left\{ z = x + iy : x = -\frac{\pi}{2}, y \geq 0 \right\}$$

переводится отображением $w = \cos z$ в положительную мнимую полуось. Луч

$$\left\{ z = x + iy : x = \frac{\pi}{2}, y \geq 0 \right\} -$$

в отрицательную мнимую полуось. Отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ вещественной оси переходит в отрезок $[0;1]$ вещественной оси. Используя принцип соответствия границ, получаем, что образом исходной полуполосы является правая полуплоскость с разрезом по отрезку $[0;1]$ (рис.39).

Ответ. Образом полуполосы $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$ при отображении $w = \cos z$ является правая полуплоскость с разрезом по отрезку $[0;1]$.

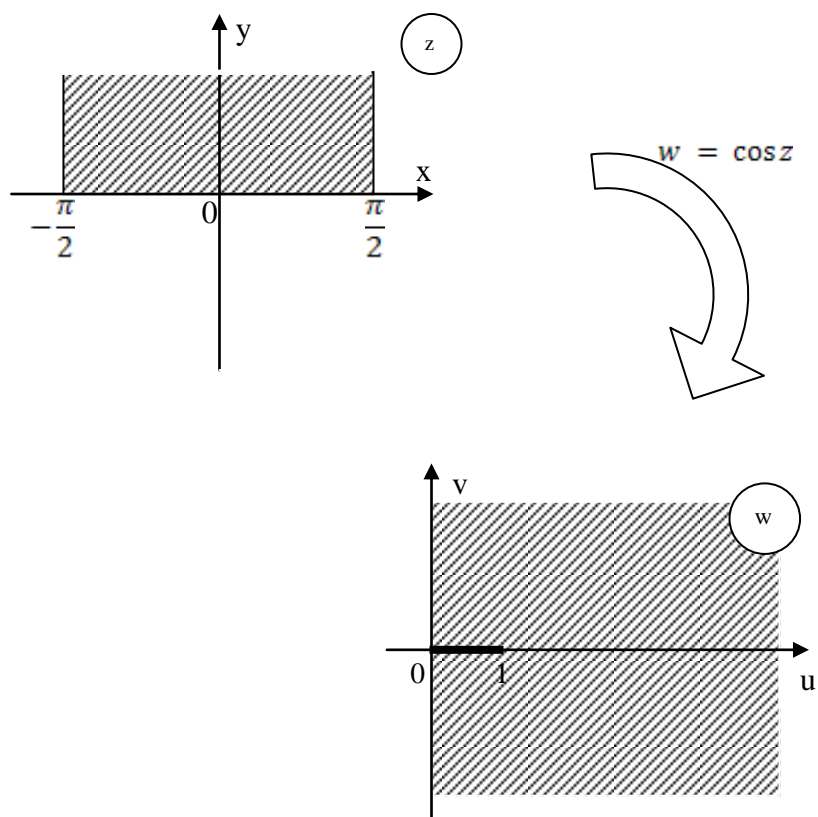


Рис.39

- 5) Граница полосы, согласно пункту 1), отобразится в объединение лучей $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, а вся полоса отобразится в комплексную плоскость с разрезами по этим лучам (рис.40).

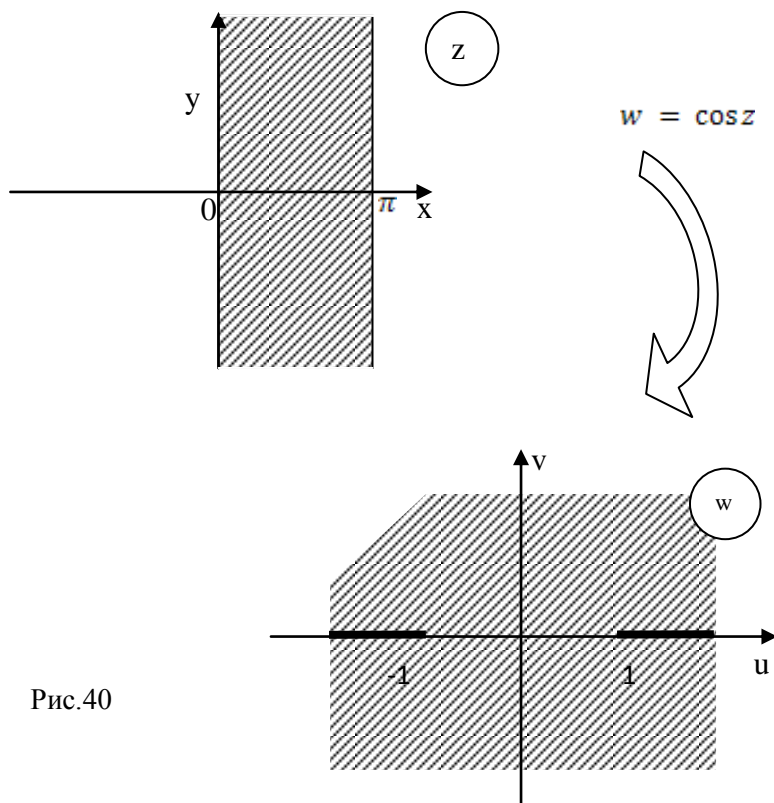


Рис.40

- 6) Отобразим границу прямоугольника, указанного в этом пункте. Снова обращаясь к пункту 1), получим, что отрезки $\{z = x + iy : x = 0, -h \leq y \leq h\}, \{z = x + iy : x = \pi, -h \leq y \leq h\}$ отобразятся посредством $w = \cos z$ соответственно в отрезки $\{w = u + iv : v = 0, 1 \leq u \leq \cosh h\}, \{w = u + iv : v = 0, -\cosh h \leq u \leq -1\}$, а два других отрезка гра-

ницы прямоугольника $\{z = x + iy : y = h, 0 \leq x \leq \pi\}$ и $\{z = x + iy : y = -h, 0 \leq x \leq \pi\}$ – в эллипс с фокусами в точках $w = \pm 1$ и полуосьми $a = \operatorname{ch} h$ и $b = \operatorname{sh} h$. Значит, сам прямоугольник переводится отображением $w = \cos z$ во внутренность эллипса $\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 h} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 h} = 1$ с разрезами по отрезкам $[-\operatorname{ch} h; -1]$ и $[1; \operatorname{ch} h]$, изображенную на рис.41.

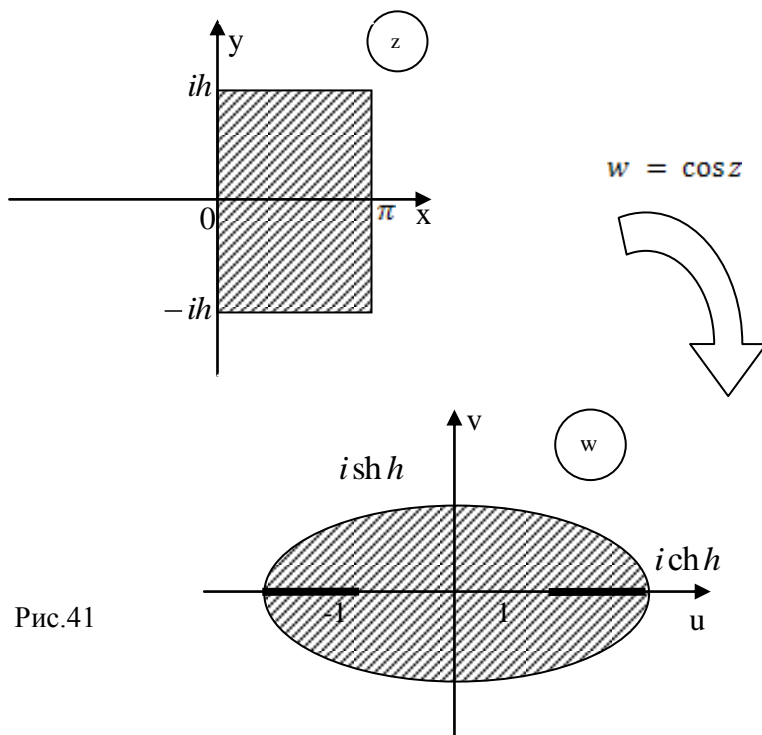


Рис.41

Задача 12. (№ 2.154 [1]) Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = \operatorname{tg} z$:

- 1) прямоугольная сетка $x = C, y = C$;
- 2) полуполоса $0 < x < \pi, y > 0$;

3) полоса $0 < x < \pi$;

4) полоса $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

5) полоса $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

Решение. 1) Найдем образ вертикальной линии $x = C$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$:

$$w = \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(C + iy) = \frac{\sin 2C}{\cos 2C + \operatorname{ch} 2y} + i \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2C + \operatorname{ch} 2y} =: u + iv.$$

Выведем зависимость u от v . При $C \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$, будет $\sin 2C \neq 0$, и можно провести следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{v}{u} &= \frac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2C}, \quad \operatorname{sh} 2y = \frac{v}{u} \sin 2C, \quad \operatorname{sh}^2 2y = \frac{v^2}{u^2} \sin^2 2C, \\ \operatorname{ch}^2 2y &= 1 + \frac{v^2}{u^2} \sin^2 2C. \end{aligned} \quad (*)$$

С другой стороны,

$$u = \frac{\sin 2C}{\cos 2C + \operatorname{ch} 2y}, \quad \operatorname{ch} 2y = \frac{\sin 2C}{u} - \cos 2C,$$

$$\operatorname{ch}^2 2y = \frac{\sin^2 2C}{u^2} - \frac{2}{u} \sin 2C \cos 2C + \cos^2 2C. \quad (**)$$

Из соотношений $(*)$ и $(**)$ получаем

$$1 + \frac{v^2}{u^2} \sin^2 2C = \frac{\sin^2 2C}{u^2} - \frac{2}{u} \sin 2C \cos 2C + \cos^2 2C,$$

$$1 - \cos^2 2C + \frac{v^2}{u^2} \sin^2 2C = \frac{\sin^2 2C}{u^2} - \frac{2}{u} \sin 2C \cos 2C,$$

$$u^2 \sin^2 2C + v^2 \sin^2 2C - \sin^2 2C = -2u \sin 2C \cos 2C,$$

$$\begin{aligned}
 u^2 + v^2 - 1 &= -2u \operatorname{ctg} 2C, \\
 u^2 + 2u \operatorname{ctg} 2C + \operatorname{ctg}^2 2C + v^2 &= 1 + \operatorname{ctg}^2 2C, \\
 (u + \operatorname{ctg} 2C)^2 + v^2 &= 1 + \operatorname{ctg}^2 2C.
 \end{aligned}$$

Поскольку знак u совпадает со знаком $\sin 2C$, то образ прямой $x = C$, $C \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$, лежит на соответствующей дуге окружности (докажите, что совпадает с этой дугой), соединяющей точки $-i$ и i . Центр этой окружности находится в точке $w_0 = -\operatorname{ctg} 2C$, а радиус равен $R = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2C} = \frac{1}{|\sin 2C|}$.

Отдельно рассмотрим случай $\sin 2C = 0$, т.е. $C = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Если $k = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$, то

$$w = \operatorname{tg}(\pi n + iy) = \operatorname{tg} iy = i \operatorname{th} y.$$

Множество значений функции $\operatorname{th} y$ есть интервал $(-1; 1)$ (проверьте!). Итак, прямые $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, отображаются в интервал мнимой оси $(-i; i)$.

Если $k = 2n + 1$, $n \in \mathbf{Z}$, то

$$w = \operatorname{tg}\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + iy\right) = -\operatorname{ctg} iy = i \operatorname{cth} y.$$

Значит, образом любой прямой $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, является множество $(-\infty; -i) \cup (i; +\infty)$.

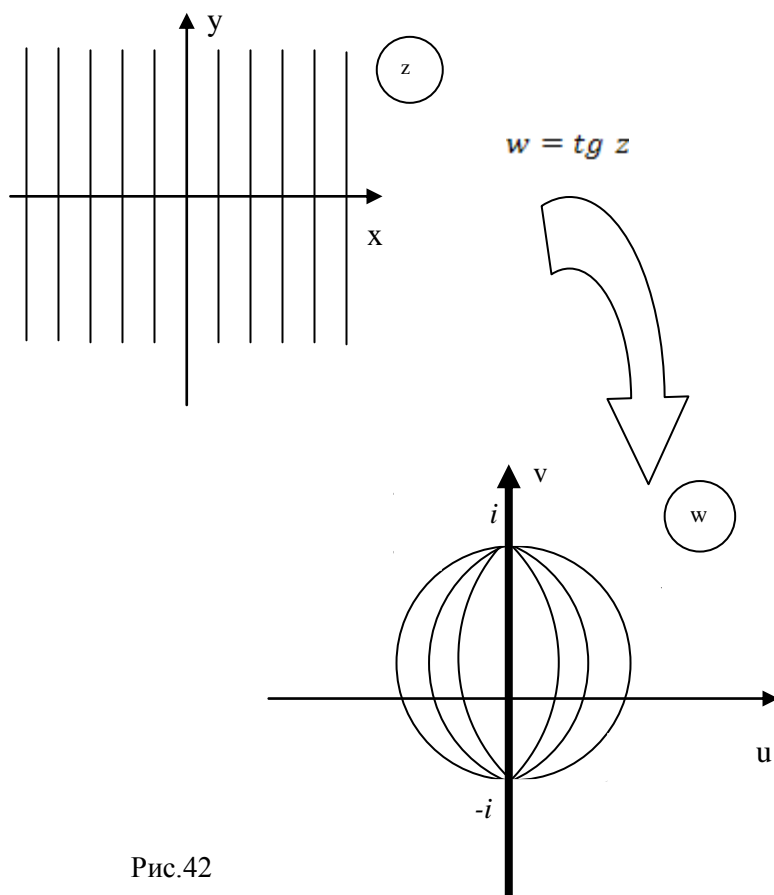


Рис.42

Найдем образ горизонтальной линии $y = C$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$:

$$w = \operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + iC) =$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2C} + i \frac{\operatorname{sh} 2C}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2C} =: u + iv.$$

При $C \neq 0$ преобразования, аналогичные тем, что были проведены выше, дают соотношение

$$(v - \operatorname{cth} 2C)^2 + u^2 = \operatorname{cth}^2 2C - 1.$$

Следовательно, семейство прямых $y = C$, $C \neq 0$, отображается в семейство окружностей с центрами $w_0 = \operatorname{cth} 2C$ и радиусами

$$R = \sqrt{\operatorname{ct} h^2 2C - 1} = \frac{1}{|\operatorname{sh} 2C|}.$$

Эти окружности пересекаются с окружностью $\{w : |w| = 1\}$ под прямым углом (окружности Аполлония относительно точек $w = \pm i$) (рис.43).

В случае $C = 0$ функция $w = \operatorname{tg} z$ отображает (не инъективно) вещественную ось на вещественную ось.

Ответ. Образом прямоугольной сетки при отображении $w = \operatorname{tg} z$ является семейство, состоящее из вещественной и мнимой осей, дуг окружностей $(u + \operatorname{ctg} 2C)^2 + v^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 2C$, соединяющих точки $-i$ и i (центру, лежащему слева от мнимой оси, соответствует правая дуга, и наоборот), а также окружностей Аполлония $(v - \operatorname{cth} 2C)^2 + u^2 = \operatorname{cth}^2 2C - 1$ относительно точек $w = \pm i$.

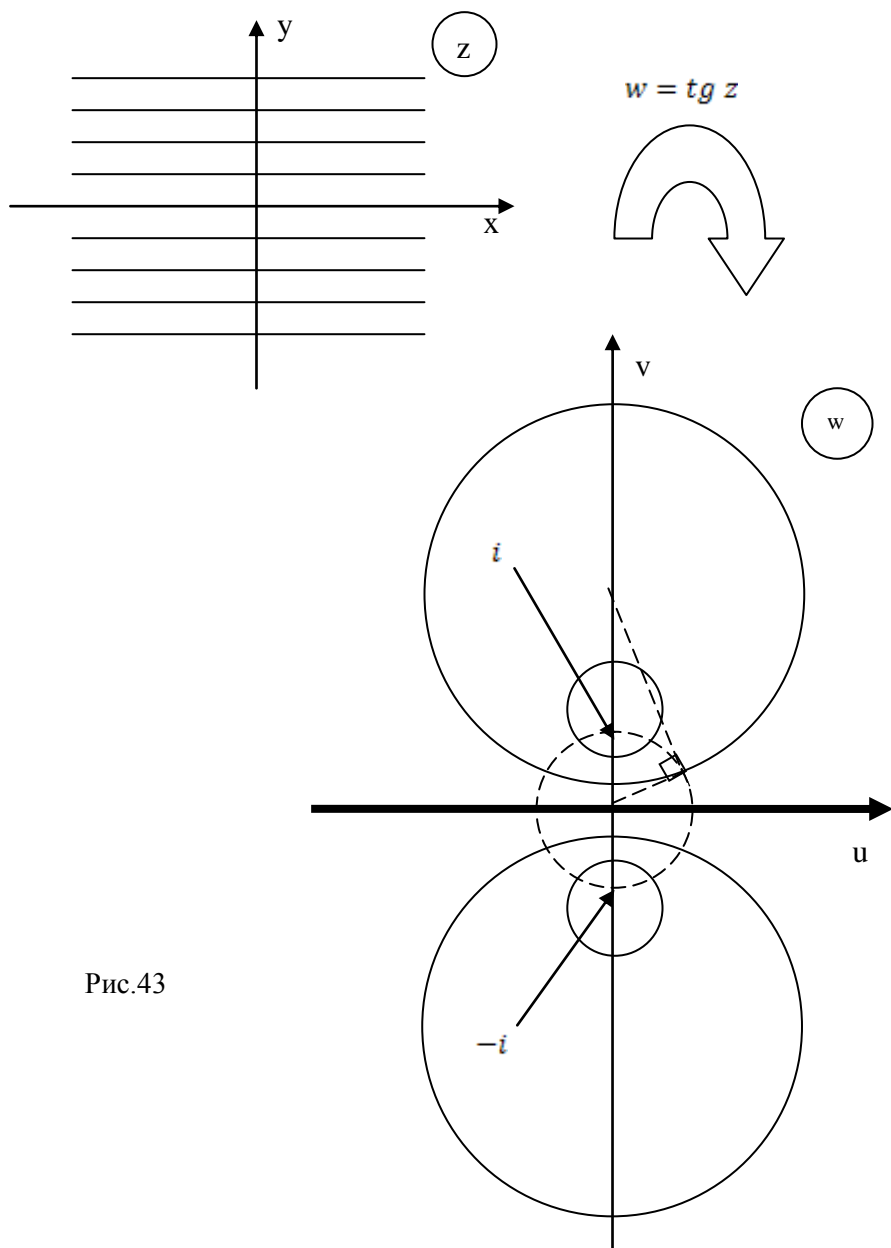


Рис.43

Упражнение 8. Опираясь на результат пункта 1) задачи 12, докажите, что:

- образом полуполосы $0 < x < \pi$, $y > 0$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$ является верхняя полуплоскость с вертикальным разрезом, соединяющим точки 0 и i (рис.44);

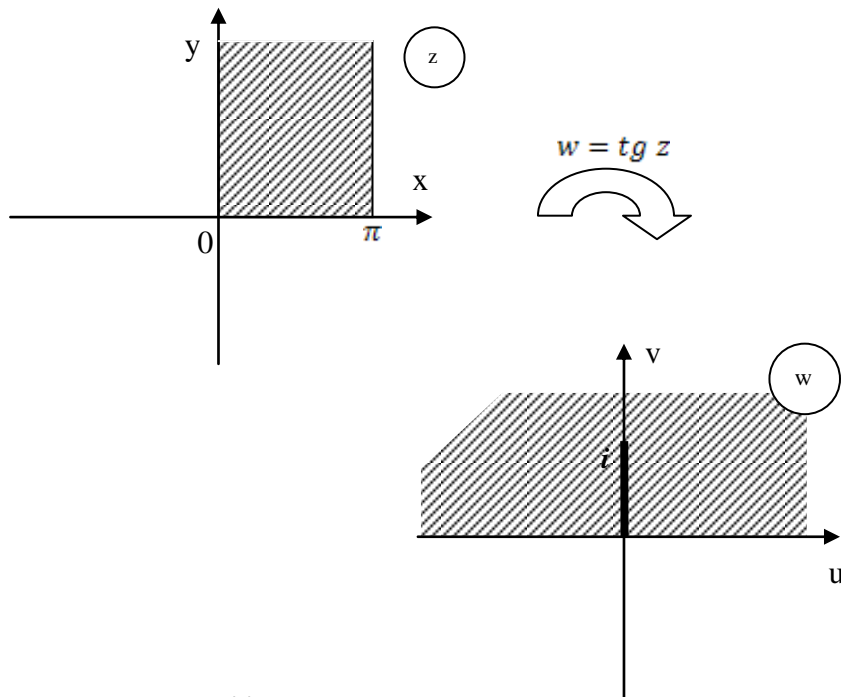


Рис.44

- образом полосы $0 < x < \pi$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$ является вся плоскость с прямолинейным разрезом, соединяющим точки $-i$ и i (рис.45);

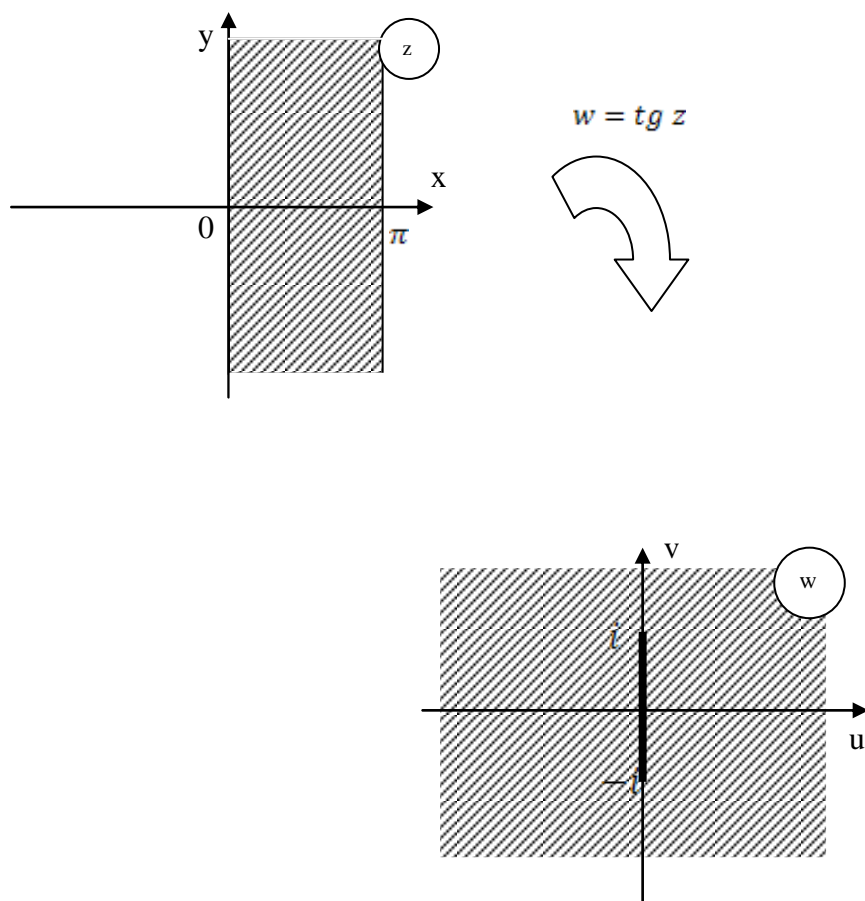


Рис.45

- образом полосы $0 < x < \frac{\pi}{4}$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$ является полукруг $\{w: |w| < 1, \operatorname{Re} w > 0\}$ (рис.46);

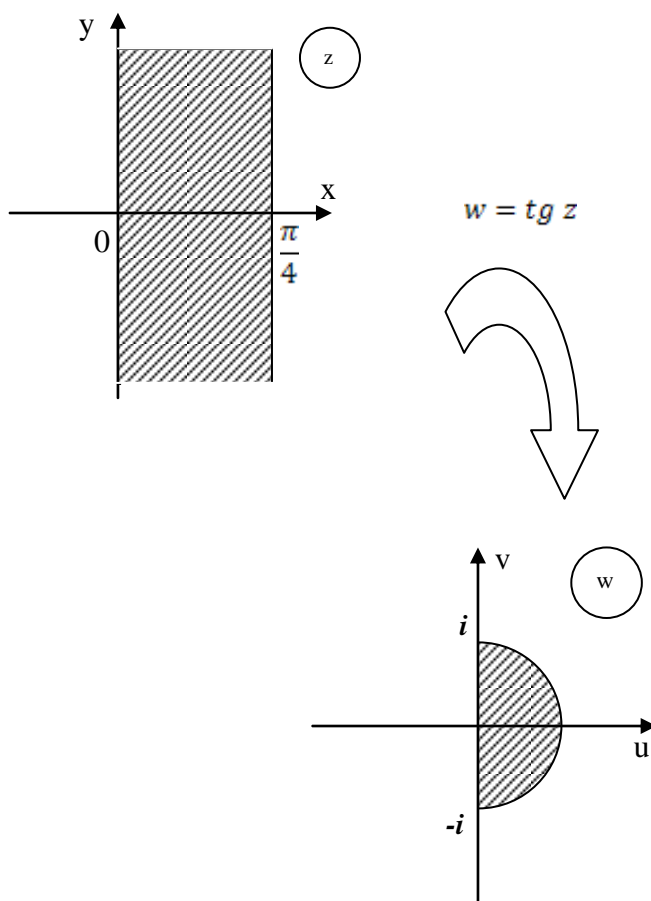


Рис.46

- образом полосы $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$ является круг $\{w : |w| < 1\}$ (рис.47).

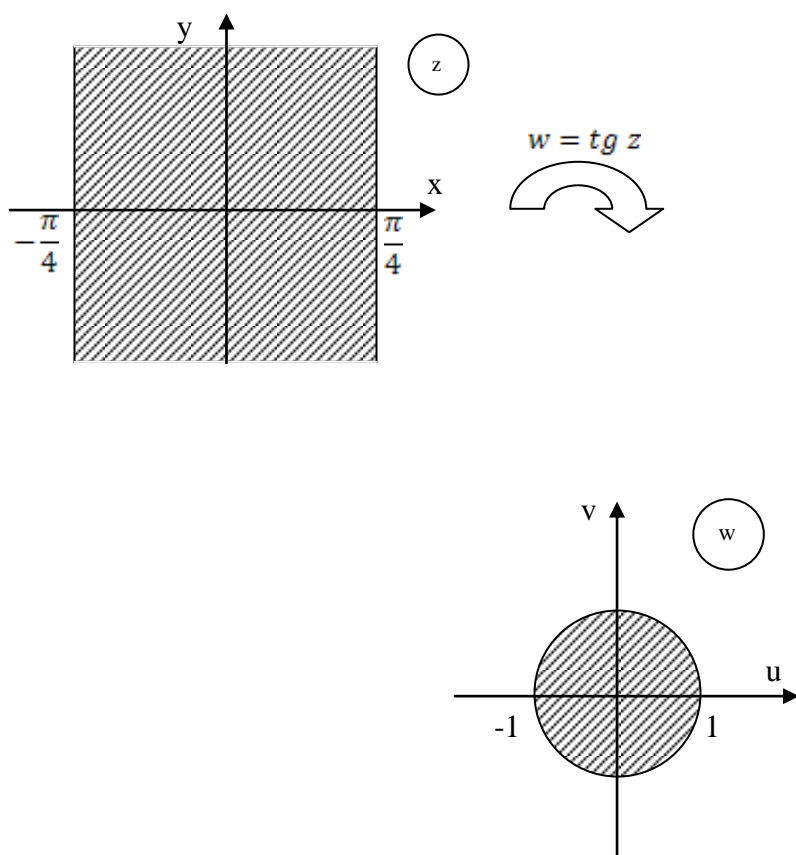


Рис.47

2. Вычисление контурных интегралов

В дополнение к рассмотренным в работе [2] контурным интегралам ниже будут разобраны примеры повышенной сложности.

Опуская строгие определения, напомним, что если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до контура Γ , ограничивающего эту область, и аналитическая внутри него, за исключением конечного числа особых точек z_k , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z_k} f(z). \quad (2.1)$$

При этом надо учитывать, что многосвязность области D приводит к интегрированию по составному контуру Γ . Кроме стандартного применения соотношения (2.1) для сравнительно небольшого числа изолированных особых точек, попавших внутрь контура Γ , часто используют теорему о сумме вычетов аналитической функции во всей расширенной комплексной плоскости:

$$\sum_k \operatorname{Res}_{z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Задача 13. Вычислить $\int_{\Gamma} \frac{z^3}{z^4 + 1} dz$, где $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$ — окружность радиуса 2 с центром в начале координат, ориентированная против хода часовой стрелки (далее такую ориентацию контуров считаем положительной).

Решение. Внутри контура Γ попадают четыре точки вида $z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{\frac{(\pi + 2\pi k)i}{4}}$, $k = \overline{0, 3}$, которые являются простыми полюсами функции $f(z) = \frac{z^3}{z^4 + 1}$, причем других особых точек в \mathbb{C} эта функция не имеет. По указанным выше соображениям

$$\int_{\Gamma} \frac{z^3}{z^4 + 1} dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{\infty} f(z).$$

Отметим, что в данном случае нет необходимости выписывать полностью разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки

$$z = \infty, \text{ а достаточно воспользоваться свойством: } f(z) = \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

при $z \rightarrow \infty$. Отсюда $c_{-1} = 1$, где c_{-1} — коэффициент при $\frac{1}{z}$ разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ∞ . Значит, $\text{Res}_{\infty} f(z) = -1$.

Ответ. $2\pi i$.

Задача 14. Вычислить $\int_{\Gamma} \sin 2z \sin \frac{1}{3z} dz$, где $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$.

Решение. Поскольку функция $f(z) = \sin 2z \sin \frac{1}{3z}$ четная, то коэффициент при $\frac{1}{z}$ разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ равен нулю: $c_{-1} = 0$.

Ответ. 0.

Далее рассмотрим примеры, в которых для вычисления $\text{Res}_{z_0} f(z)$ требуется найти разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

Задача 15. Вычислить $\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}}$, где $\Gamma_r = \{z : |z| = r\}$ в каждом

из следующих случаев:

а) $r = 1$, б) $r = \frac{1}{4}$, в) $r = 0,11$.

Решение. Рассмотрим случай а). Все нули функции $\sin \frac{1}{z}$ явля-

ются простыми и расположены в точках $z_k = \frac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Поэтому функция $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ имеет в указанных точках простые

полюсы. Точка $z = 0$ является точкой накопления полюсов и поэтому не является изолированной особой точкой. По этой причине к функции $f(z)$ в области $\text{int } \Gamma_1 = \{z : |z| < 1\}$ с границей $\Gamma_1 = \{z : |z| = 1\}$ нельзя применять теорему о сумме вычетов. Рассмотрим область $\text{ext } \Gamma_1 = \{z : |z| > 1\}$. Контур Γ_1 ориентирован против хода часовой стрелки, поэтому по определению вычета функции в бесконечно удалённой точке $\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}} = -2\pi i \text{Res}_{\infty} f(z)$.

При всех $z \neq 0$ функцию $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} + \dots} = \frac{1}{\frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^4} - \dots \right)}$$

Покажем один приём разложения по степеням соответствующего ряда.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^4} - \dots} &= \frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^4} + \dots \right) + \left(1 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^4} + \dots \right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

где $|q| < 1$ и $q = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^4} + \dots$ (при достаточно больших $|z|$).

Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} = z \left(1 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{3!^2} - \frac{1}{5!} \right) \cdot \frac{1}{z^4} + \dots \right)$$

есть разложение в ряд Лорана в окрестности ∞ . Отсюда коэффициент $c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$. Значит, $\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{6}$. Итак, в случае

а), т.е. для $\Gamma_1 = \{z : |z| = 1\}$ положительной ориентации, имеем

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}} = -2\pi i \operatorname{Res}_{\infty} f(z) = \frac{2\pi i}{6} = \frac{\pi i}{3}.$$

Ответ. а) $\frac{\pi i}{3}$.

Рассмотрим случай б). Здесь $\Gamma_{\frac{1}{4}} = \left\{ z : |z| = \frac{1}{4} \right\}$. Напомним, что в

каждом простом полюсе z_k для функции вида $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где

$\varphi(z), \psi(z)$ – аналитические в окрестности z_k функции, справед-

лива формула $\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}$. В частности, для $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$

получим $\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \frac{1}{-\frac{1}{z_k^2} \cos \frac{1}{z_k}} = -\frac{1}{\pi^2 k^2 \cos \pi k} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2 k^2}$, так

как $z_k = \frac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Как и в пункте а), нельзя применить

формулу (2.1) к $f(z)$ в области $\operatorname{int} \Gamma_{\frac{1}{4}}$, поэтому рассмотрим со-

ставной контур $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{\frac{1}{4}}^- \bigcup \Gamma_1$, где $\Gamma_{\frac{1}{4}}^-$ – ориентированная по ходу

часовой стрелки окружность $\left\{ z : |z| = \frac{1}{4} \right\}$, а окружность Γ_1 ориентирована против хода часовой стрелки.

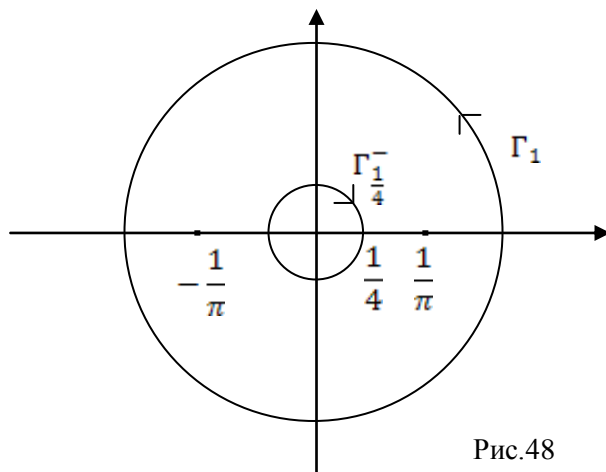


Рис.48

Из точек z_k только $z_1 = \frac{1}{\pi}$ и $z_{-1} = -\frac{1}{\pi}$ лежат в области $\text{int } \tilde{\Gamma}$ (между контурами $\Gamma_{\frac{1}{4}}^-$ и Γ_1), и по теореме о вычетах для составного контура (см. рис.48)

$$\int_{\Gamma_{\frac{1}{4}}^- \cup \Gamma_1} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}} = 2\pi i \left\{ \text{Res}_{z_1} f(z) + \text{Res}_{z_{-1}} f(z) \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right\} = \frac{4i}{\pi}.$$

Поскольку для функции $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ выполняется соотношение

$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_1^-} f(z) dz = \int_{\Gamma_1^-} f(z) dz + \int_{\Gamma_1} f(z) dz$, а в пункте а) вычислен интеграл

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}} = \frac{\pi i}{3}, \text{ то можем записать}$$

$$\int_{\Gamma_1^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \frac{4i}{\pi} = \frac{\pi i}{3} - \frac{4i}{\pi} = \frac{\pi^2 - 12}{3\pi} i.$$

Ответ. б) $\frac{\pi^2 - 12}{3\pi} i$.

Аналогично рассматривается случай в) $\Gamma_r = \{z : |z| = r\}$, $r = 0,11$.

Для составного контура $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{0,11}^- \cup \Gamma_{\frac{1}{4}}$, внутрь которого из точек

z_k попали только $\pm \frac{1}{2\pi}$ (проверьте!), запишем с учетом результата

пункта б) следующие равенства

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{0,11}^- \cup \Gamma_{\frac{1}{4}}} f(z) dz &= 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}_{\frac{1}{2\pi}} f(z) + \operatorname{Res}_{-\frac{1}{2\pi}} f(z) \right\} = \\ &= 2\pi i \left\{ -\frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} \right\} = -\frac{i}{\pi}; \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_{0,11}} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}} = \int_{\Gamma_{\frac{1}{4}}} f(z) dz + \frac{i}{\pi} = i \left(\frac{\pi}{3} - \frac{4}{\pi} \right) + \frac{i}{\pi} = i \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi} \right) = \frac{\pi^2 - 9}{3\pi} i.$$

Ответ. в) $\frac{\pi^2 - 9}{3\pi} i$.

Задача 15. Вычислить $\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z\sqrt{z^2 + z + 1}}$ в случае $0 < r < 1$.

Замечание. Значение этого интеграла зависит от выбора ветви многозначной функции

$$w = \sqrt{z^2 + z + 1}.$$

Известно, что $w = \sqrt{w_1}$ – двузначная функция, имеющая точки ветвления 0 и ∞ (см. [3]) и допускающая выделение двух однозначных ветвей во всей комплексной плоскости \mathbb{C} с разрезом по любой жордановой кривой, соединяющей точки 0 и ∞ . Наиболее наглядной является ситуация с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$, то есть в области $\mathbb{C}_{w_1} \setminus (-\infty, 0]$. Тогда ветви выделяются фиксированием k в формуле

$$w = \sqrt{w_1}^{(k)} = |w_1|^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\arg w_1 + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\arg w_1 + 2\pi k}{2} \right),$$

$$-\pi < \arg w_1 < \pi, k = 0, 1.$$

Другими словами, выделение ветви $\sqrt{w_1}$ такой, что $\sqrt{1} = \sqrt{1}^{(0)} = 1$ равнозначен выбору в указанной формуле значения $k = 0$, а ветви $\sqrt{w_1}$ с условием $\sqrt{1} = \sqrt{1}^{(1)} = -1$ – выбору $k = 1$. Значения ветвей функции $\sqrt{w_1}$ в каждой точке $w_1 \in \mathbb{C}_{w_1} \setminus (-\infty, 0]$ связаны соотношением $\sqrt{w_1}^{(1)} = -\sqrt{w_1}^{(0)}$, то есть отличаются знаком.

Преобразование областей ветвями функции $w = \sqrt{w_1}$ показаны на рисунках 49 и 50.

Ветвь $w = \sqrt{w_1}^{(0)}$ отображает область $\mathbb{C}_{w_1} \setminus (-\infty; 0]$ на полуплоскость $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$ (рис.49), а ветвь $w = \sqrt{w_1}^{(1)}$ – на полуплоскость $\{w : \operatorname{Re} w < 0\}$ (рис.50).

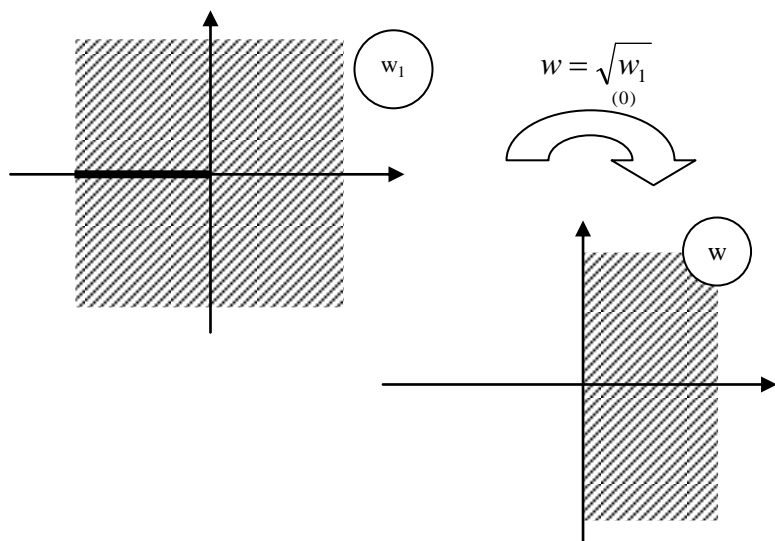


Рис.49

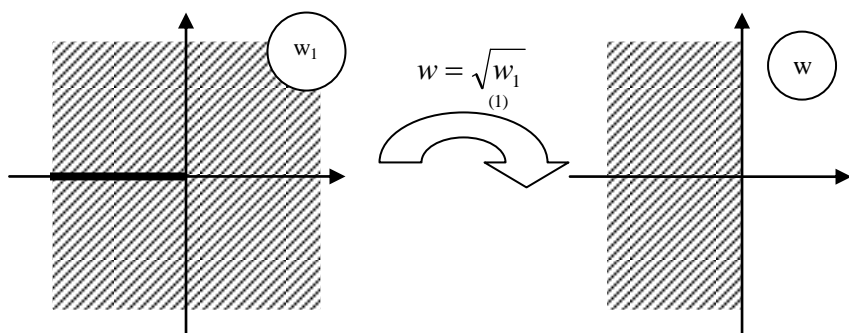


Рис.50

Решение. Представим многочлен w_1 в виде

$$w_1 = z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \text{ Корни } z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ этого квадратного трехчлена являются точками}$$

ветвления функции $w = \sqrt{w_1} = \sqrt{z^2 + z + 1}$. Отметим, что точка $z = \infty$ не является точкой ветвления, так как степень подкоренного многочлена кратна показателю корня (см. [3]).

Рассмотрим комплексную плоскость \mathbb{C}_z с разрезом в виде отрезка прямой, соединяющей точки z_1 и z_2 через точку ∞ , т.е. по двум лучам прямой $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$. Образом этой области при ото-

бражении $w_1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ является плоскость \mathbb{C}_{w_1} с разрезом по лучу $(-\infty; 0]$. Действительно, записав множество точек разреза в виде

$$l_z = \left\{ z : z = -\frac{1}{2} + i\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), t \in (-\infty; 0] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \right\},$$

видим, что он преобразуется в

$$l_{w_1} = \left\{ w_1 : w_1 = -\left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, t \in (-\infty; 0] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \right\},$$

т.е. в луч $(-\infty; 0]$ (докажите!). Область $\mathbb{C}_{w_1} \setminus l_{w_1}$ первой ветвью отображения $w = \sqrt{w_1}$ преобразуется в верхнюю полуплоскость

$\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$, а второй ветвью $w = \sqrt{w_1}^{(1)}$ — в нижнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Re} w < 0\}$.

Таким образом, первоначальная область $\mathbb{C}_z \setminus l_z$ отображается обычными аналитическими функциями, являющимися ветвями функции $w = \sqrt{z^2 + z + 1}$ ($w = \sqrt{z^2 + z + 1}_{(0)}$, $w = \sqrt{z^2 + z + 1}_{(1)}$, причём $\sqrt{z^2 + z + 1}_{(1)} = -\sqrt{z^2 + z + 1}_{(0)}$) соответственно на эти полуплоскости.

Поэтому вычет функции $f(z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2 + z + 1}}$, аналитической в области $\{z: |z| < r\} \setminus \{0\}$, $0 < r < 1$, и имеющей простой полюс в точке $z = 0$, вычисляется по обычной формуле

$$\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z\sqrt{z^2 + z + 1}} = 2\pi i \operatorname{Res}_0 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z)z = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0 + 1}} = \pm 2\pi i,$$

в которой $\Gamma_r = \{z: |z| = r\}$, $0 < r < 1$.

Знак ставится в соответствии с выбором однозначной ветви функции $f(z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2 + z + 1}}$.

Ответ. $\pm 2\pi i$.

Следующий пример иллюстрирует один из способов аналитического продолжения.

Задача 16. Вычислить $\int_{\Gamma_r} \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} dz$, где $\Gamma_r = \{z: |z| = r\}$, в каждом из следующих случаев:

а) $0 < r < \pi^2$, б) $\pi^2 < r < 4\pi^2$, в) $r = 40$.

Решение. а) Функция $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}}$ при одновременном выборе любой из двух однозначных ветвей \sqrt{z} в числителе и знаменателе

является однозначной и аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $z_k = \pi^2 k^2, k \in \mathbb{N}$ ($\sin \sqrt{z} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{z} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, но $z=0$ – устранимая особая точка $f(z)$). Утверждение относительно точки $z=0$ следует из приводимого ниже разложения $f(z)$ в ряд по степеням z .

Из разложения $\sin t$ в окрестности точки $t=0$ в ряд Тейлора получим, что функция $f(z)$ представляется некоторым степенным рядом в круге с центром в начале координат (исключая центр) и радиусом, равным расстоянию от точки $z=0$ до ближайшего к ней корня $z_1 = \pi^2$ уравнения $\sin \sqrt{z} = 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{z})^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(2k+1)!}} = \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(2k+1)!}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, 0 < |z| < \pi^2. \end{aligned}$$

Следовательно, после соответствующего доопределения, $f(z)$ будет в круге $|z| < \pi^2$ аналитической функцией. Поэтому интеграл

$$\int_{\Gamma_r} \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} dz = 0, \quad 0 < r < \pi^2. \quad \text{Более того, } f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} \text{ является}$$

аналитическим продолжением суммы степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, |z| < \pi^2, \text{ в область } \mathbb{C} \setminus \{z_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Ответ. а) 0.

б) Точки $z_k = \pi^2 k^2, k=1,2,\dots$, являются простыми полюсами функции $f(z)$ с вычетами в них, равными

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \frac{\sqrt{z_k}}{(\sin \sqrt{z_k})'} = \frac{2z_k}{\cos \sqrt{z_k}} \Big|_{z_k = \pi^2 k^2} = \frac{2\pi^2 k^2}{\cos \pi k} = (-1)^k 2\pi^2 k^2.$$

Внутри контура $\Gamma_r = \{z : |z| = r\}$, $\pi^2 < r < 4\pi^2$, попадает один простой полюс $z_1 = \pi^2$ подынтегральной функции $f(z)$. Итак,

$$\int_{\Gamma_r} \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{\pi^2} f(z) = 2\pi i(-2\pi^2) = -4\pi^3 i.$$

Ответ. б) $-4\pi^3 i$.

в) В области $\operatorname{int} \Gamma_r = \{z : |z| < r\}$ при $r = 40$ находятся два простых полюса $z_1 = \pi^2$, $z_2 = 4\pi^2$ подынтегральной функции. Значит,

$$\int_{\Gamma_r} \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} dz = 2\pi i \{ \operatorname{Res}_{\pi^2} f(z) + \operatorname{Res}_{4\pi^2} f(z) \} = 2\pi i(-2\pi^2 + 8\pi^2) = 12\pi^3 i.$$

Ответ. в) $12\pi^3 i$.

Задача 17. Вычислить $\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{\sin 3z(1 - \cos 2z)}$ в каждом из сле-

дующих случаев:

$$a) 0 < r < \frac{\pi}{3}, \quad б) \frac{\pi}{3} < r < \frac{2\pi}{3}, \quad в) r = 2.$$

Решение. Функция $\sin 3z$ обращается в нуль только в точках $z_k = \frac{\pi}{3}k$, $k \in \mathbf{Z}$, причем каждый из этих нулей простой. Все нули функции $1 - \cos 2z$ суть точки $z_{3n} = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (проверьте, что каждый из этих нулей имеет кратность, равную двум). Таким образом, подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках

$z_k = \frac{\pi}{3}k$, $k \neq 3n$, и полюсы третьего порядка в точках $z_{3n} = \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

а) Внутри контура $\Gamma_r = \{z: |z| = r\}$, $0 < r < \frac{\pi}{3}$, лежит только одна особая точка функции $f(z) = \frac{1}{\sin 3z(1 - \cos 2z)}$, а именно, полюс третьего порядка $z_0 = 0$. Непосредственное применение формулы для вычисления вычета в этой точке приводит к громоздким выкладкам, если не воспользоваться приемом разложения в степенные ряды (см. задачу 15).

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_0 f(z) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} (f(z) z^3)'' = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^3}{\sin 3z(1 - \cos 2z)} \right)'' = \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{z^3}{3z \left(1 - \frac{(3z)^2}{3!} + \frac{(3z)^4}{5!} - \dots \right) (2z)^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{(2z)^2}{4!} + \frac{(2z)^4}{6!} - \dots \right)} \right\}'' = \\ &= \frac{1}{12} \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{(3z)^2}{3!} - \dots \right) \left(1 + \frac{2(2z)^2}{4!} - \dots \right) \right\}'' = \\ &= \frac{1}{12} \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \left(\frac{9}{3!} + \frac{8}{4!} \right) z^2 + \dots \right)'' = \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{\sin 3z(1 - \cos 2z)} = 2\pi i \operatorname{Res}_0 f(z) = 2\pi i \frac{11}{36} = \frac{11\pi i}{18}.$$

Ответ. а) $\frac{11\pi i}{18}$.

б) Область $\text{int } \Gamma_r = \{z : |z| < r\}$ при $\frac{\pi}{3} < r < \frac{2\pi}{3}$ содержит кроме полюса третьего порядка $z_0 = 0$ еще два простых полюса $z_1 = \frac{\pi}{3}$ и $z_{-1} = -\frac{\pi}{3}$ функции $f(z)$. Найдем вычеты в них:

$$\text{Res}_{\pm \frac{\pi}{3}} f(z) = \frac{1}{\{\sin 3z(1 - \cos 2z)\}'|_{z=\pm \frac{\pi}{3}}} = -\frac{2}{9}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{\sin 3z(1 - \cos 2z)} &= 2\pi i (\text{Res}_{-\frac{\pi}{3}} f(z) + \text{Res}_0 f(z) + \text{Res}_{\frac{\pi}{3}} f(z)) = \\ &= 2\pi i \left(-\frac{2}{9} + \frac{11}{36} - \frac{2}{9}\right) = -\frac{5\pi i}{18}. \end{aligned}$$

Ответ. б) $-\frac{5\pi i}{18}$.

В случае в) к особым точкам $z_{-1} = -\frac{\pi}{3}$, $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{\pi}{3}$, лежащим внутри контура $\Gamma_2 = \{z : |z| = 2\}$, добавляются ещё два простых полюса $z_{-2} = -\frac{2\pi}{3}$, $z_2 = \frac{2\pi}{3}$ подынтегральной функции $f(z) = \frac{1}{\sin 3z(1 - \cos 2z)}$. Найдем вычеты в указанных точках:

$$\text{Res}_{\pm \frac{2\pi}{3}} f(z) = \frac{1}{\{\sin 3z(1 - \cos 2z)\}'|_{z=\pm \frac{2\pi}{3}}} = \frac{2}{9}.$$

Ответ. в) $\frac{11\pi i}{18}$.

Упражнение 9. Вычислить $\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{\sin \sqrt{3}z(1 - \cos 2z)}$ в каждом из

следующих случаев:

а) $0 < r < \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, б) $\frac{\pi}{\sqrt{3}} < r < \pi$, в) $r = 4$.

Задача 18. Вычислить $\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z(1 - e^{-hz^2})}$, где $h > 0$, в следующих слу-

чаях:

а) $0 < r < \sqrt{\frac{2\pi}{h}}$, б) $\sqrt{\frac{2\pi}{h}} < r < \sqrt{\frac{4\pi}{h}}$.

Решение. Особые точки подынтегральной функции находятся из уравнения $z(1 - e^{-hz^2}) = 0$. Точка $z = 0$ является полюсом третьего порядка функции $f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{-hz^2})}$, поскольку при достаточно малых $|z| > 0$ справедливо представление

$$f(z) = \frac{1}{z^3 h \left(1 - \frac{hz^2}{2!} + \frac{h^2 z^4}{3!} - \dots \right)} = \frac{1}{hz^3} \left(1 + \frac{hz^2}{2!} - \dots \right).$$

Остальные изолированные особые точки $f(z)$ будут ее простыми полюсами и находятся из формулы

$$-hz_k^2 = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

т.е. $z_k = \sqrt{\frac{2\pi k}{h}}(-i)$. Проверьте последнее утверждение, показав,

что $(1 - e^{-hz^2})'_{z=z_k} \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

а) Очевидно, $z_0 = 0$ – единственная изолированная особая точка функции $f(z)$, попавшая в круг $\left\{ z : |z| < |z_1| = \sqrt{\frac{2\pi}{h}} \right\}$. Используя полученное выше разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = 0$, при $0 < r < \sqrt{\frac{2\pi}{h}}$ получаем

$$\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z(1 - e^{-hz^2})} = 2\pi i \operatorname{Res}_0 f(z) = 2\pi i \frac{h}{2!h} = \pi i.$$

Ответ. а) πi .

В случае б) $\sqrt{\frac{2\pi}{h}} < r < \sqrt{\frac{4\pi}{h}}$ рассмотрим сначала $k \in \mathbf{N}$. Выпишем значения ветвей квадратного корня $z_k = \sqrt{\frac{2\pi k}{h}}(-i)$ при этих k :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\pi k}{h}}(-i) &= \sqrt{\frac{2\pi k}{h}} \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{2\pi k}{h}} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} \text{ и} \\ \sqrt{\frac{2\pi k}{h}}(-i) &= \sqrt{\frac{2\pi k}{h}} \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{2\pi k}{h}} \left\{ \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Эти точки лежат на биссектрисах второго и четвёртого квадрантов.

Теперь рассмотрим значения $z_k = \sqrt{\frac{2\pi k}{h}}(-i)$ при $-k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2\pi k}{h}}(-i) &= \sqrt{\frac{2\pi(-k)}{h}} \sqrt{i} = \sqrt{-\frac{2\pi k}{h}} \left\{ \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right\} \text{ и} \\ \sqrt{\frac{2\pi k}{h}}(-i) &= \sqrt{\frac{2\pi(-k)}{h}} \sqrt{i} = \sqrt{-\frac{2\pi k}{h}} \left\{ \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Эти точки лежат на биссектрисах первого и третьего квадрантов.

Заметим, что

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \frac{1}{\{z(1 - e^{-hz^2})\}' \Big|_{z=z_k}} = \frac{1}{(1 - e^{-hz_k^2}) + 2hz_k^2 e^{-hz_k^2}} = \frac{i}{4\pi k}$$

независимо от k и выбора ветви квадратного корня в формуле для z_k , поскольку $z_k^2 = -\frac{2\pi ki}{h}$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

В круг $\{z: |z| < r\}$ при $\sqrt{\frac{2\pi}{h}} < r < \sqrt{\frac{4\pi}{h}}$ попадают лишь пять особых точек $f(z)$, а именно, точки $0, \sqrt{\frac{2\pi}{h}}e^{\pm \frac{\pi i}{4}}, \sqrt{\frac{2\pi}{h}}e^{\pm \frac{3\pi i}{4}}$. Поэтому для указанных r имеем

$$\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z(1 - e^{-hz^2})} = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4\pi} + \frac{i}{4\pi} - \frac{i}{4\pi} - \frac{i}{4\pi} \right) = \pi i.$$

Ответ. б) πi .

3. Вычисление несобственных интегралов

3.1. Лемма Жордана и связанные с ней интегралы

В работе [2] показано, как методы комплексного анализа применяются к вычислению несобственных интегралов от вещественных функций. В этом разделе будут рассмотрены задачи повышенной сложности, связанные с нахождением несобственных интегралов.

При вычислении интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ключевую роль играет следующее утверждение.

Лемма Жордана. Пусть $f(z)$ непрерывна на множестве $\{z: |z| \geq R_0, \operatorname{Im} z \geq -a\}$, $a > 0$, и на этом множестве $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Тогда для любого $b > 0$ имеем $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ibz} f(z) dz = 0$, где C_R – дуга окружности $|z| = R$, лежащая в рассматриваемом множестве.

Укажем получаемые применением леммы Жордана формулы, позволяющие находить интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx, \quad a > 0,$$

где $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ – рациональная функция, причем степень многочлена $Q(z)$, по крайней мере, на единицу больше степени $P(z)$, и на вещественной оси $Q(x) \neq 0$ и $\operatorname{Im} R(x) = 0$ (последнее условие заведомо выполняется, если все коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ вещественные). Именно, справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res} R(z) e^{iaz} \right\}, \quad (3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res} R(z) e^{iaz} \right\}, \quad (3.2)$$

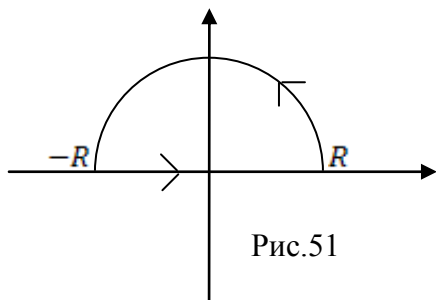


Рис.51

где суммирование ведется по всем полюсам a_k функции $R(z)$, лежащим в верхней полуплоскости (их, очевидно, конечное число). Эти формулы получаются применением основной теоремы о вычетах к интегралу от функции $R(z)e^{iaz}$, взятому по вспомога-

тельному контуру $C_R \cup [-R; R]$ (рис.51) с последующим предельным переходом при $R \rightarrow +\infty$, использующим лемму Жордана. Здесь C_R – верхняя полуокружность $\{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Задача 19. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + x + 1} dx$.

Решение. Функция $R(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1}$ имеет в верхней полуплоскости один простой полюс $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому указанная выше формула (3.1) дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x dx &= \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} R(z) e^{iz} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{ze^{iz}}{2z+1} \Big|_{z=-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) e^{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}}{i\sqrt{3}} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} (-1 + i\sqrt{3}) \left(\cos \frac{1}{2} - i \sin \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{3}} \right\} = \frac{\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{3}}.$$

Ответ.
$$\frac{\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{3}}.$$

Упражнение 10. Используя формулу (3.2), найти интеграл
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Ответ.
$$\frac{\pi(4 - e)}{3e^2}.$$

Важной и полезной в приложениях леммой Жордана, разумеется, не исчерпывается все многообразие методов теории вычетов, применяемых при вычислении несобственных интегралов. В большинстве случаев приходится преодолевать две основные трудности, связанные с выбором вспомогательного контура интегрирования и поиском подходящей подынтегральной функции. В общей ситуации нет четких алгоритмов для решения обеих проблем. Мы приведем лишь некоторые примеры несобственных интегралов, не принадлежащих рассмотренному выше типу.

Задача 20. (№ 4.205 [1]) Вычислить
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx, \quad -\pi < a < \pi.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z}$, которая и будет

помещена под знак вспомогательного контурного интеграла. Найдём особые точки этой функции, решив уравнение

$$\operatorname{ch} \pi z = \frac{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^{\pi z})^2 = -1 \Leftrightarrow e^{\pi z} = \pm i \Leftrightarrow \pi z = \operatorname{Ln}(\pm i) = \ln 1 + i(\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

Итак, $z_k = i\left(\pm \frac{1}{2} + 2k\right), k \in \mathbb{Z}$, — простые (поскольку

$(\operatorname{ch} \pi z)'(z_k) = \pi \operatorname{sh} \pi z_k \neq 0$) полюсы функции $f(z)$.

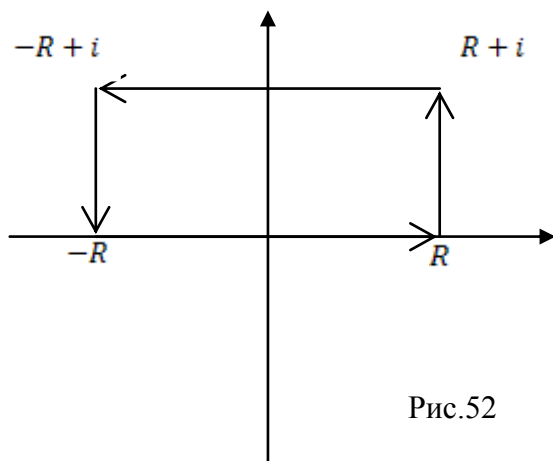


Рис.52

Так как все особые точки z_k лежат на мнимой оси, то контур вида $C_R \cup [-R; R]$ при неограниченном возрастании R будет содержать внутри себя всё большее число особых точек. Поэтому в качестве вспомогательного контура выберем

прямоугольник P_R с вершинами в точках $-R, R, R+i, -R+i$ (рис.52). Этот прямоугольник при любом $R > 0$ содержит внутри себя только один простой полюс $z_0 = \frac{i}{2}$ функции $f(z)$. При этом,

$$\operatorname{Res}_{\frac{i}{2}} f(z) = \frac{e^{\frac{ai}{2}}}{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi i}{2}} = \frac{e^{\frac{ai}{2}}}{\pi i},$$

так как $\operatorname{sh} iz = i \sin z$ для всех $z \in \mathbb{C}$. По основной теореме теории вычетов

$$\int_{P_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{i}{2}} f(z) = 2e^{\frac{ai}{2}}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{P_R} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx + \int_R^{R+i} \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z} dz + \int_{R+i}^{-R+i} \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z} dz + \int_{-R+i}^{-R} \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z} dz = \\ &= I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) + I_4(R). \end{aligned}$$

Преобразуем отдельно третье слагаемое, сделав замену переменной $z = x + i$ (тогда $x \in [R; -R]$, $dz = dx$):

$$\begin{aligned} I_3(R) &= \int_{R+i}^{-R+i} \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z} dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{a(x+i)}}{\operatorname{ch} \pi(x+i)} dx = -e^{ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{-\operatorname{ch} \pi x} dx = \\ &= e^{ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx = e^{ai} I_1(R). \end{aligned}$$

Поскольку

$$I_1(R) = \int_{-R}^0 \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx + \int_0^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx = \int_0^R \frac{e^{-ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx + \int_0^R \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx = 2 \int_0^R \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx,$$

то

$$\begin{aligned} I_1(R) + I_3(R) &= (1 + e^{ai}) I_1(R) = 2(1 + e^{ai}) \int_0^R \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx = \\ &= 2e^{\frac{ai}{2}} \left(e^{-\frac{ai}{2}} + e^{\frac{ai}{2}} \right) \int_0^R \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx = 4e^{\frac{ai}{2}} \cos \frac{a}{2} \int_0^R \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx. \end{aligned}$$

Оценим теперь $|I_2(R)|$ и $|I_4(R)|$. Имеем

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &= \left| \int_R^{R+i} \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z} dz \right| = \left| i \int_0^1 \frac{e^{a(R+ix)}}{\operatorname{ch} \pi(R+ix)} dx \right| \leq e^{aR} \int_0^1 \frac{dx}{|\operatorname{ch} \pi(R+ix)|} \leq \\ &\leq 2e^{aR} \int_0^1 \frac{dx}{|e^{\pi R} e^{i\pi x} + e^{-\pi R} e^{-i\pi x}|} \leq \frac{2e^{aR}}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty, \text{ так как} \end{aligned}$$

$$-\pi < a < \pi.$$

Аналогично (проверьте самостоятельно), $I_4(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$.
Переходя к пределу в равенстве

$$\sum_{k=1}^4 I_k(R) = 2e^{\frac{ai}{2}},$$

с учетом полученной выше информации о поведении $I_k(R)$, приходим к соотношению

$$4e^{\frac{ai}{2}} \cos \frac{a}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx = 2e^{\frac{ai}{2}}, \text{ откуда следует}$$

Ответ. $\frac{1}{2 \cos \frac{a}{2}}.$

Упражнение 11. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} \pi x} dx, \quad 0 < a < \pi.$

Ответ. $\frac{1}{\cos \frac{a}{2}}.$

Рассмотрим еще несколько несобственных интегралов, взятых по лучу.

Задача 21. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx$, где m, n – натуральные

числа и $m < n$.

Решение. Особые точки функции $f(z) = \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}$ найдём из уравнения $z^{2n} = -1$, решая которое получим $z_k = e^{\frac{\pi(1+2k)}{2n}i}, \quad k = 0, 2n-1$. В качестве вспомогательного контура выберем контур γ_R , состоящий из отрезков лучей $\arg z = 0$, $\arg z = \frac{\pi}{n}$ и соединяющей их дуги окружности $|z| = R$ (рис.53).

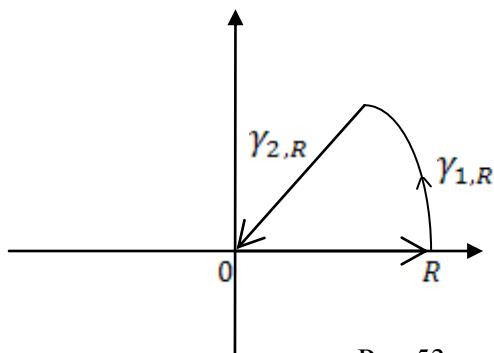


Рис.53

При любом $R > 1$ внутри γ_R попадает единственная особая точка $f(z)$, а именно, простой полюс $z_0 = e^{\frac{\pi}{2n}i}$. Поэтому

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} = 2\pi i \frac{z_0^{2m}}{2nz_0^{2n-1}} = \frac{\pi i}{n} z_0^{2m+1-2n} = -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{\pi(2m+1)}{2n}i}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} dz &= \int_0^R \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx + \int_{\gamma_{1,R}} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} dz + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} dz = \\ &= \int_0^R \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx + I_1(R) + I_2(R). \end{aligned}$$

Докажем, что $I_1(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} I_1(R) &= \left\| \begin{aligned} z &= Re^{i\varphi}, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{n}\right] \\ dz &= iRe^{i\varphi} d\varphi \end{aligned} \right\| = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{R^{2m} e^{2mi\varphi} iRe^{i\varphi}}{1 + R^{2n} e^{2ni\varphi}} d\varphi = \\ &= iR^{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{e^{(2m+1)i\varphi}}{1 + R^{2n} e^{2ni\varphi}} d\varphi. \end{aligned}$$

По условию $m \leq n-1$, поэтому

$$\begin{aligned}
|I_1(R)| &\leq |iR^{2m+1}| \left| \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{e^{(2m+1)i\varphi}}{1+R^{2n}e^{2ni\varphi}} d\varphi \right| \leq R^{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{d\varphi}{|R^{2n}e^{2ni\varphi}|-1} \leq \\
&\leq R^{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{d\varphi}{R^{2n}-1} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{R^{2m+1}}{R^{2n}-1} \leq \frac{\pi}{n} \cdot \frac{R^{2n-1}}{R^{2n}-1} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Далее, } I_2(R) &= \left\| \begin{aligned} z &= x e^{\frac{\pi i}{n}}, x \in [R; 0] \\ dz &= e^{\frac{\pi i}{n}} dx \end{aligned} \right\| = -e^{\frac{\pi i}{n}} \int_0^R \frac{x^{2m} e^{\frac{2\pi m i}{n}}}{1+x^{2n} e^{2\pi i}} dx = \\
&= -e^{\frac{\pi(2m+1)i}{n}} \int_0^R \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, устремляя в равенстве

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} dz = \int_0^R \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx + I_1(R) + I_2(R)$$

переменную R к $+\infty$, получаем

$$-\frac{\pi i}{n} e^{\frac{\pi(2m+1)i}{2n}} = \left(1 - e^{\frac{\pi(2m+1)i}{n}} \right) \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx,$$

откуда

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx &= \frac{\pi i}{n} \frac{e^{\frac{\pi(2m+1)i}{2n}}}{e^{\frac{\pi(2m+1)i}{n}} - 1} = \frac{\pi i}{n} \frac{1}{e^{\frac{\pi(2m+1)i}{2n}} - e^{-\frac{\pi(2m+1)i}{2n}}} = \\
&= \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi(2m+1)}{2n}}.
\end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi(2m+1)}{2n}}.$

3.2. Интегралы, содержащие логарифм

Интерес представляет несобственный интеграл по полуоси $(0; +\infty)$ в случае, когда $z=0$ является точкой ветвления соответствующей вспомогательной функции комплексной переменной.

Пусть $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ – рациональная функция, не имеющая полюсов на неотрицательной части действительной полуоси, причем степень $Q(z)$, по крайней мере, на 2 единицы больше степени многочлена $P(z)$, и все коэффициенты многочленов P и Q вещественны.

Вычислим

$$\int_0^{+\infty} F(x) \ln x dx$$

(рекомендуем проверить сходимость этого интеграла при указанных предположениях относительно $F(x)$).

Для этого рассмотрим контурный интеграл $\int_{\Gamma_{r,R}} F(z) (\ln z)^2 dz$,

где $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$, – главное значение $\text{Ln } z$, а

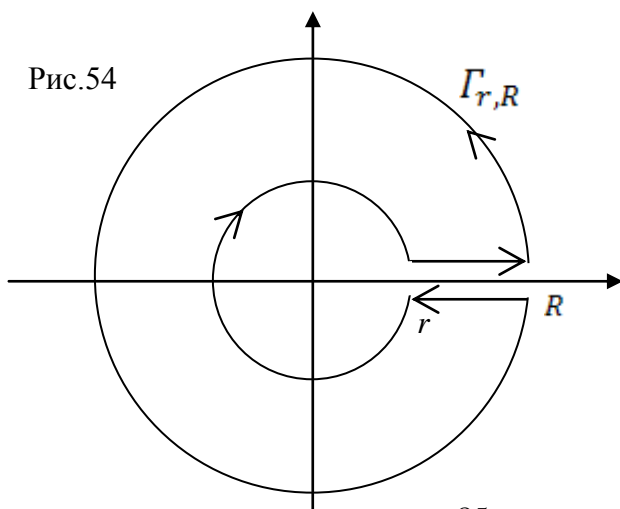


Рис.54

контур $\Gamma_{r,R}$ состоит из окружностей $|z|=r$, $|z|=R$, $0 < r < R$, и разреза вдоль отрезка $[r; R]$ (рис.54). Выбирая достаточно большое R и достаточно малое r , можно считать, что все полюсы

$F(z)$ лежат внутри контура $\Gamma_{r,R}$.

Тогда

$$\int_{\Gamma_{r,R}} F(z)(\ln z)^2 dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z_j} \{ F(z)(\ln z)^2 \},$$

где z_j — все полюсы $F(z)$.

С другой стороны, производя стандартную замену переменных в интегралах по окружностям, можно записать

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{r,R}} F(z)(\ln z)^2 dz &= \int_r^R F(x)(\ln x)^2 dx + iR \int_0^{2\pi} F(Re^{i\varphi})(\ln Re^{i\varphi})^2 e^{i\varphi} d\varphi + \\ &+ \int_R^r F(x)(\ln x + 2\pi i)^2 dx + ir \int_{2\pi}^0 F(re^{i\varphi})(\ln re^{i\varphi})^2 e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= I_1(r, R) + I_2(R) + I_3(r, R) + I_4(r). \end{aligned}$$

Оценив интегралы $I_2(R)$ и $I_4(r)$, получаем, что они стремятся к нулю при $R \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow 0$ соответственно (рекомендуем проделать подробные выкладки самостоятельно). Далее,

$$\begin{aligned} I_1(r, R) + I_3(r, R) &= \int_0^R F(x)(\ln x)^2 dx - \int_0^R F(x)(\ln x + 2\pi i)^2 dx = \\ &= 4\pi^2 \int_0^R F(x) dx - 4\pi i \int_0^R F(x) \ln x dx. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow 0$ в представлении

$$I_1(r, R) + I_2(R) + I_3(r, R) + I_4(r) = \int_{\Gamma_{r,R}} F(z)(\ln z)^2 dz,$$

приходим к равенству

$$4\pi^2 \int_0^{+\infty} F(x) dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} F(x) \ln x dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z_j} \{ F(z)(\ln z)^2 \}.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем формулы:

$$\int_0^{+\infty} F(x) \ln x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z_j} \{ F(z) (\ln z)^2 \} \right], \quad (3.3)$$

$$\int_0^{+\infty} F(x) dx = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z_j} \{ F(z) (\ln z)^2 \} \right]. \quad (3.4)$$

Замечание. В случае четной рациональной функции $F(z)$ для вычисления $\int_0^{+\infty} F(x) \ln x dx$ можно рассмотреть интеграл

$\int_{\gamma_{r,R}} F(z) \ln z dz$, где контур $\gamma_{r,R}$ состоит из отрезков $[-R; -r]$, $[r; R]$ действительной оси и полуокружностей $|z| = r$, $|z| = R$, $0 < r < R$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ (рис.55). Считаем, что внутри контура

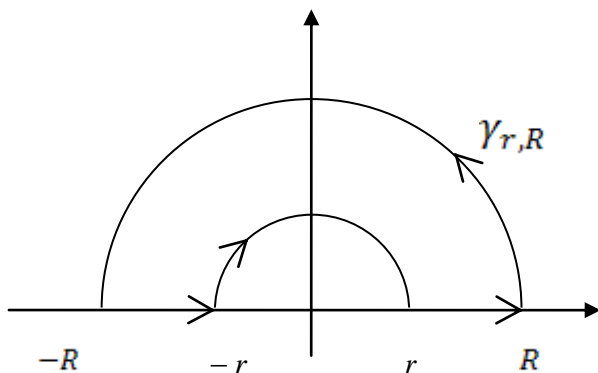


Рис.55

лежат все полюсы функции $F(z)$, находящиеся в верхней полуплоскости. Опуская подробные вычисления (вдумчивый читатель без труда восстановит их самостоятельно), мы приведем лишь формулы, получающиеся тем же методом, что и выше:

$$\int_0^{+\infty} F(x) \ln x dx = \pi \operatorname{Re} \left[i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res} \{ F(z) \ln z \} \right], \quad (3.5)$$

$$\int_0^{+\infty} F(x) dx = 2 \operatorname{Im} \left[i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res} \{ F(z) \ln z \} \right].$$

Задача 22. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2}$, где a и b – положительные числа.

Решение. В этом примере $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(z+a)^2 + b^2}$ имеет простые полюсы $z_{1,2} = -a \pm bi$, не попадающие на положительную полуось; степень $Q(z)$ на 2 единицы больше степени многочлена $P(z)$. Наконец,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_1 = -a - bi} \{ F(z) (\ln z)^2 \} &= \frac{(\ln z_1)^2}{2(z_1 + a)} = -\frac{[n(-a - bi)]^2}{2bi} = \\ &= \frac{i}{2b} \left(\ln \sqrt{a^2 + b^2} + i \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) \right)^2, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}_{z_2 = -a + bi} \{ F(z) (\ln z)^2 \} = -\frac{i}{2b} \left(\ln \sqrt{a^2 + b^2} + i \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) \right)^2.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z_1} \{ F(z) (\ln z)^2 \} + \operatorname{Res}_{z_2} \{ F(z) (\ln z)^2 \} = -\frac{1}{b} (\ln(a^2 + b^2) + 2\pi) \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Применяя формулу (3.3), имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} = \frac{\ln(a^2 + b^2)}{2b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Ответ. $\frac{\ln(a^2 + b^2)}{2b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$

Задача 23. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2 + 1)^2}.$

Решение. Функция $F(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ допускает применение формулы (3.5). Лишь одна особая точка этой функции лежит в верхней полуплоскости – полюс второго порядка $z_1 = i$. При этом

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\{F(z) \ln z\}_{z_1=i} &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{\ln z}{(z+i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z+i)^2 - 2z(z+i) \ln z}{z(z+i)^4} = \\ &= \frac{2i - 2i \ln i}{i(2i)^3} = -\frac{1 - \ln i}{4i} = \frac{i}{4} \left(1 - \frac{\pi i}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (3.5)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2 + 1)^2} = \pi \operatorname{Re} \left\{ i \left(\frac{\pi}{8} + \frac{i}{4} \right) \right\} = -\frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{4}.$

Задача 24. (№ 4.191 [1]) Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x^2 + a^2},$ где $a > 0.$

Решение. Введем в рассмотрение вспомогательный контурный интеграл $\oint_{\gamma_{r,R}} \frac{\ln^2 z}{z^2 + a^2} dz,$ где $\gamma_{r,R}$ изображен на рис.55 и такой, что $ai \in \operatorname{int} \gamma_{r,R}.$ По основной теореме теории вычетов

$$\oint_{\gamma_{r,R}} \frac{\ln^2 z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \frac{\ln^2 ai}{2ai} = \frac{\pi}{a} \left(\ln a + \frac{\pi}{2} i \right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{a} \left(\ln^2 a - \frac{\pi^2}{4} + \pi i \ln a \right).$$

Найдем этот же интеграл другим способом:

$$\oint_{\gamma_{r,R}} \frac{\ln^2 z}{z^2 + a^2} dz = \int_r^R \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx + iR \int_0^\pi \frac{\ln^2 (Re^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{R^2 e^{2i\varphi} + a^2} d\varphi +$$

$$+ \int_{-R}^{-r} \frac{(\ln(-x) + \pi)^2}{x^2 + a^2} dx + ir \int_\pi^0 \frac{\ln^2 (re^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{r^2 e^{2i\varphi} + a^2} d\varphi.$$

Как и при выводе формулы (3.3), показываем, что интегралы $iR \int_0^\pi \frac{\ln^2 (Re^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{R^2 e^{2i\varphi} + a^2} d\varphi$ и $ir \int_\pi^0 \frac{\ln^2 (re^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{r^2 e^{2i\varphi} + a^2} d\varphi$ стремятся к нулю, если $R \rightarrow +\infty$, а $r \rightarrow 0$. Кроме того,

$$\int_r^R \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{(\ln(-x) + \pi)^2}{x^2 + a^2} dx = \int_r^R \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx -$$

$$- \int_R^r \frac{(\ln x + \pi)^2}{x^2 + a^2} dx = \int_r^R \frac{\ln^2 x + (\ln x + \pi)^2}{x^2 + a^2} dx =$$

$$= 2 \int_r^R \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx + 2\pi i \int_r^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx - \pi^2 \int_r^R \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

Перейдем к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow 0$ в полученном равенстве

$$\frac{\pi}{a} \left(\ln^2 a - \frac{\pi^2}{4} + \pi i \ln a \right) = 2 \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx + 2\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx +$$

$$- \pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} + iR \int_0^\pi \frac{\ln^2 (Re^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{R^2 e^{2i\varphi} + a^2} d\varphi + ir \int_\pi^0 \frac{\ln^2 (re^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{r^2 e^{2i\varphi} + a^2} d\varphi.$$

В результате приходим к представлению

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} \left(\ln^2 a - \frac{\pi^2}{4} + \pi i \ln a \right) - 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \\ + \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

По формуле (3.5)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \pi \operatorname{Re} \left\{ i \frac{\ln ai}{2ai} \right\} = \pi \operatorname{Re} \left\{ \frac{\ln a + \frac{\pi}{2} i}{2a} \right\} = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

С учетом того, что $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}$, окончательно

находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \left(\ln^2 a - \frac{\pi^2}{4} + \pi i \ln a \right) - \frac{\pi^2 i \ln a}{2a} + \frac{\pi^3}{4a} = \\ = \frac{\pi}{2a} \left(\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4} \right).$$

Ответ. $\frac{\pi}{2a} \left(\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4} \right).$

Задача 25. Вычислить $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + 3x + 1} dx$.

Решение. Вычислим вспомогательный контурный интеграл

$$\oint_{\Gamma_{r,R}} \frac{\ln^3 z}{z^2 + 3z + 1} dz, \text{ где контур } \Gamma_{r,R} \text{ изображен на рис.54. Проводя}$$

уже знакомые рассуждения, получаем равенство

$$\oint_{\Gamma_{r,R}} \frac{\ln^3 z}{z^2 + 3z + 1} dz = \int_r^R \frac{\ln^3 x}{x^2 + 3x + 1} dx + iR \int_0^{2\pi} \frac{\ln^3 (Re^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{R^2 e^{2i\varphi} + 3Re^{i\varphi} + 1} d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_R^r \frac{(\ln x + 2\pi i)^3}{x^2 + 3x + 1} dx + ir \int_{2\pi}^0 \frac{\ln^3(re^{i\varphi})e^{i\varphi}}{r^2 e^{2i\varphi} + 3re^{i\varphi} + 1} d\varphi = \\
& 2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}_{z_k} \frac{\ln^3 z}{z^2 + 3z + 1}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Здесь $z_1 = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $z_2 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ – простые полюсы функции

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 1}, \text{ причем справедливо соотношение } z_1 \cdot z_2 = 1,$$

используя которое найдем $\ln \frac{3-\sqrt{5}}{2} = -\ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}_{z_k} \frac{\ln^3 z}{z^2 + 3z + 1} &= 2\pi i \left(\frac{\ln^3 z_1}{2z_1 + 3} + \frac{\ln^3 z_2}{2z_2 + 3} \right) = \\
&= -\frac{2\pi i}{\sqrt{5}} \left[\left(\ln \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) + \pi i \right)^3 - \left(\ln \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) + \pi i \right)^3 \right] = \\
&= -\frac{4\pi i}{\sqrt{5}} \left(\ln^3 \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 3\pi^2 \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Несложно проверить, что интегралы $\int_0^{2\pi} \frac{\ln^3(Re^{i\varphi})e^{i\varphi}}{R^2 e^{2i\varphi} + 3Re^{i\varphi} + 1} d\varphi$ и

$$\int_{2\pi}^0 \frac{\ln^3(re^{i\varphi})e^{i\varphi}}{r^2 e^{2i\varphi} + 3re^{i\varphi} + 1} d\varphi \text{ стремятся к нулю при } R \rightarrow +\infty \text{ и } r \rightarrow 0$$

соответственно. Дальнейшие преобразования дают

$$\begin{aligned}
\int_r^R \frac{\ln^3 x}{x^2 + 3x + 1} dx + \int_R^r \frac{(\ln x + 2\pi i)^3}{x^2 + 3x + 1} dx &= \int_r^R \frac{\ln^3 x - (\ln x + 2\pi i)^3}{x^2 + 3x + 1} dx = \\
&= \int_r^R \frac{-6\pi i \ln^2 x + 12\pi^2 \ln x + 8\pi^3 i}{x^2 + 3x + 1} dx =
\end{aligned}$$

$$= 12\pi^2 \int_r^R \frac{\ln x}{x^2 + 3x + 1} dx + 8\pi^3 i \int_r^R \frac{dx}{x^2 + 3x + 1} - 6\pi i \int_r^R \frac{\ln^2 x}{x^2 + 3x + 1} dx.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow 0$ в равенстве (3.6), имеем

$$\begin{aligned} 12\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 3x + 1} dx + 8\pi^3 i \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 1} - 6\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + 3x + 1} dx = \\ = -\frac{4\pi i}{\sqrt{5}} \left(\ln^3 \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 3\pi^2 \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

Осталось отдельно вычислить два первых интеграла в левой части этого равенства. Используя формулу (3.3), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 3x + 1} dx &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[i \left(\frac{\ln^2 z_1}{2z_1 + 3} + \frac{\ln^2 z_2}{2z_2 + 3} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[-\frac{i}{\sqrt{5}} \left(\ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) + \pi i \right)^2 - \left(\ln \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) + \pi i \right)^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\frac{4\pi}{\sqrt{5}} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$ можно посчитать непосредственно, но в

данном случае легче воспользоваться формулой (3.4), так как сумма вычетов уже найдена:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{4\pi}{\sqrt{5}} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right] = \frac{2}{\sqrt{5}} \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Подводя итог вычислениям, приходим к равенству

$$-6\pi \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + 3x + 1} dx = -\frac{4\pi}{\sqrt{5}} \left(\ln^3 \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 3\pi^2 \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) -$$

$$-\frac{16\pi^3}{\sqrt{5}} \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + 3x + 1} dx = \frac{2}{3\sqrt{5}} \left(\pi^2 + \ln^2 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ. $\frac{2}{3\sqrt{5}} \left(\pi^2 + \ln^2 \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

3.3. Интегралы, содержащие дробные степени

Пусть $F(z)$ – однозначная аналитическая функция на всей плоскости, за исключением особых точек, причем последние не лежат на положительной части действительной оси. В предположении, что интеграл $\int_0^{+\infty} x^\alpha F(x) dx$ сходится ($\alpha \in \mathbf{R}$), требуется вычислить его.

Рассмотрим следующий контурный интеграл: $\oint_{\Gamma_{R,r}} z^\alpha F(z) dz$, где

контур $\Gamma_{R,r}$ состоит из окружностей $|z| = r$, $|z| = R$ и разреза вдоль отрезка $[r; R]$ (рис.54).

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_{R,r}} z^\alpha F(z) dz &= \int_r^R x^\alpha F(x) dx + \oint_{|z|=R} z^\alpha F(z) dz + \\ &+ e^{2\pi i \alpha} \int_R^r x^\alpha F(x) dx + \int_{|z|=r} z^\alpha F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} (z^\alpha F(z)), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $z_k \notin [0; +\infty)$, $k = \overline{1, n}$, – особые точки $F(z)$. Подробное обоснование возможности применения основной теоремы теории вычетов при выводе формулы (3.7), включающее процесс выделения

однозначных ветвей функции z^α и придающее смысл интегралу $\oint_{\Gamma_{R,r}} z^\alpha F(z) dz$, смотри в монографии [4, с.268].

Предположим, что $F(x)$ такова, что каждый из интегралов $\int_{|z|=r} z^\alpha F(z) dz$ и $\int_{|z|=R} z^\alpha F(z) dz$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow +\infty$ соответственно. Указанные условия выполняются, например, когда $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональная функция, для которой степень многочлена $Q(x)$, по крайней мере, на две единицы больше степени многочлена $P(x)$. Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow +\infty$ в равенстве (3.7), получим

$$(1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^{+\infty} x^\alpha F(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}(z^\alpha F(z)).$$

Если α не является целым, то из последнего равенства находим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^\alpha F(x) dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}(z^\alpha F(z)) = \\ &= -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{-\pi i \alpha} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}(z^\alpha F(z)), \quad \alpha \notin \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Упражнение 12. В тех же предположениях относительно $F(z)$, что и в (3.8), доказать справедливость при любом $\alpha \in \mathbf{Z}$ формулы

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha F(x) dx = - \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}(z^\alpha F(z) \ln z),$$

где $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$, а под z^α , как и в формуле (3.8), понимается $e^{\alpha \ln z}$.

Следующий интеграл возникает в теории роста целых функций. Он вычисляется в разных источниках (см., например, [5]).

Задача 26. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$, где $0 < \alpha < 1$.

Решение. По формуле (3.8)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{x(1+x)} dx = -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{-\pi \alpha i} \operatorname{Res}_{-1} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = \\ &= -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{-\pi \alpha i} e^{(\alpha-1) \ln(-1)} = -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{-\pi \alpha i} e^{(\alpha-1) \pi i} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$.

Задача 27. (№ 4.174 [1]) Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx$, где $-1 < \alpha < 1$, $-\pi < \theta < \pi$.

Решение. Мы не будем рассматривать случай $\alpha = 0$ как тривиальный (в этом случае интеграл легко считается без применения теории вычетов). При каждом $\alpha \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ можно применить формулу (3.8).

В этом примере $F(z) = \frac{1}{z^2 + 2z \cos \theta + 1}$. Если $\theta = 0$, то $F(z)$ имеет единственную особую точку – полюс второго порядка $z = -1$, причем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-1} F(z) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z^{\alpha})' = \lim_{z \rightarrow -1} (\alpha z^{\alpha-1}) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \alpha e^{(\alpha-1) \ln z} = \alpha e^{(\alpha-1) \pi i} = -\alpha e^{\pi \alpha i}. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (3.8)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x+1)^2} dx = -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{-\pi \alpha i} \cdot (-\alpha e^{\pi \alpha i}) = \frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha}.$$

Если же $\theta \neq 0$, то функция $F(z)$ имеет два простых полюса $z_1 = -\cos \theta - i \sin \theta$ и $z_2 = -\cos \theta + i \sin \theta$. При нахождении ее

вычетов понадобится записать эти точки в удобном виде

$$z_1 = \cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta) = e^{(\pi + \theta)i},$$

$$z_2 = \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) = e^{(\pi - \theta)i}, \text{ замечая, что } \pi \pm \theta \in (0; 2\pi)$$

при $-\pi < \theta < \pi$. С учетом этого получаем

$$\operatorname{Res}_{z_1} \frac{z^\alpha}{z^2 + 2z \cos \theta + 1} = \frac{e^{\alpha(\pi + \theta)i}}{2(-\cos \theta - i \sin \theta + \cos \theta)} = -\frac{e^{\alpha(\pi + \theta)i}}{2i \sin \theta},$$

$$\operatorname{Res}_{z_2} \frac{z^\alpha}{z^2 + 2z \cos \theta + 1} = \frac{e^{\alpha(\pi - \theta)i}}{2(-\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta)} = \frac{e^{\alpha(\pi - \theta)i}}{2i \sin \theta}.$$

Следовательно, формула (3.8) дает

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx &= -\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{-\pi \alpha i} \left(\frac{e^{\alpha(\pi - \theta)i}}{2i \sin \theta} - \frac{e^{\alpha(\pi + \theta)i}}{2i \sin \theta} \right) = \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi \alpha \sin \theta} \frac{e^{\alpha \theta i} - e^{-\alpha \theta i}}{2i} = \frac{\pi \sin \alpha \theta}{\sin \pi \alpha \sin \theta}. \end{aligned}$$

Ответ. При $\alpha \neq 0$ интеграл равен $\frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha}$, если $\theta = 0$, и

$$\frac{\pi \sin \alpha \theta}{\sin \pi \alpha \sin \theta}, \text{ если } \theta \neq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2004.
2. Барменков А.Н., Бухарова Т.И., Логинов А.С., Сандракова Е.В. Методические рекомендации к решению задач по теории функций комплексного переменного. М.: МИФИ, 2005.
3. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М. – Л.: ГИТТЛ, 1950.
4. Шведенко С.В. Начала анализа функций комплексной переменной. М.: МИФИ, 2008.
5. Гельфонд А.О. Вычеты и их приложения. М.: Ком-Книга, 2006.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Предисловие..... | 3 |
| 1. Конформные отображения..... | 4 |
| 1.1. Линейная функция..... | 7 |
| 1.2. Дробно-линейная функция..... | 9 |
| 1.3. Функция Жуковского..... | 17 |
| 1.4. Степенная функция..... | 24 |
| 1.5. Показательная функция..... | 31 |
| 1.6. Логарифмическая и тригонометрические функции..... | 36 |
| 2. Вычисление контурных интегралов..... | 60 |
| 3. Вычисление несобственных интегралов..... | 77 |
| 3.1. Лемма Жордана и связанные с ней интегралы..... | 77 |
| 3.2. Интегралы, содержащие логарифм..... | 85 |
| 3.3. Интегралы, содержащие дробные степени..... | 94 |
| Список литературы..... | 98 |

Анатолий Николаевич Барменков
Елизавета Васильевна Сандракова
Владимир Борисович Шерстюков
Ольга Владимировна Шерстюкова

**МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебно-методическое пособие

Редактор Т.В. Волвенкова

Подписано в печать 10.12.2009. Формат 60х84 1/16.
Печ.л. 7,0. Изд.л. 7,0. Тираж 100 экз. Изд. №1/4/68. Заказ № 31

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский»,
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, 42